



Universidad Nacional Mayor de San Marcos

Universidad del Perú. Decana de América

Facultad de Ciencias Físicas

Escuela Profesional de Física

**Sobre la relación subyacente al entrelazamiento
cuántico y los agujeros de gusano: $ER=EPR$**

TESIS

Para optar el Título Profesional de Licenciado en Física

AUTOR

Gustavo Cesar VALDIVIA MERA

ASESOR

Dr. Teófilo VARGAS AUCCALLA

Lima, Perú

2019



Reconocimiento - No Comercial - Compartir Igual - Sin restricciones adicionales

<https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/>

Usted puede distribuir, remezclar, retocar, y crear a partir del documento original de modo no comercial, siempre y cuando se dé crédito al autor del documento y se licencien las nuevas creaciones bajo las mismas condiciones. No se permite aplicar términos legales o medidas tecnológicas que restrinjan legalmente a otros a hacer cualquier cosa que permita esta licencia.

Referencia bibliográfica

Valdivia, G. (2019). *Sobre la relación subyacente al entrelazamiento cuántico y los agujeros de gusano: $ER=EPR$* . Tesis para optar el título profesional de Licenciado en Física. Escuela Profesional de Física, Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos, Lima, Perú.

Hoja de metadatos complementarios

- Código ORCID del asesor

Teófilo Vargas Auccalla: 0000-0002-9833-3887.

- DNI del autor

Gustavo Cesar Valdivia Mera: 46332279

- Grupo de investigación

Grupo de Física Teórica,
Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

- Institución que financia parcial o totalmente la investigación

Vicerrectorado de Investigación y Posgrado,
Universidad Nacional Mayor de San Marcos.

- Ubicación geográfica donde se desarrolló la investigación

Facultad de Ciencias Físicas, Universidad Nacional Mayor de San Marcos.
Ciudad Universitaria - UNMSM, Cercado de Lima 15081.

- Año o rango de años que la investigación abarcó

15/08/2018 - 22/03/2019



Universidad Nacional Mayor de San Marcos
Universidad del Perú. Decana de América

FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS

ESCUELA PROFESIONAL DE FÍSICA

**ACTA DE SUSTENTACIÓN DE TESIS PARA OPTAR EL
TÍTULO PROFESIONAL DE LICENCIADO EN FÍSICA**

Siendo las 14:00 horas del viernes 22 de marzo del 2019, en el Salón de Grados de la Facultad de Ciencias Físicas – Unidad de Posgrado (Auditorio 304), bajo la Presidencia del Dr. Fulgencio Villegas Silva (Presidente), Dr. Pablo Héctor Rivera Riofano (Miembro), Dr. Teófilo Vargas Auccalla (Asesor) y, el Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes (Suplente), se dio inicio a la Sesión Pública de Sustentación de Tesis para la Licenciatura en Física, mediante la Modalidad M1, del Bachiller:

VALDIVIA MERA, GUSTAVO CESAR

Dando lectura al Resumen del Expediente, el Presidente del Jurado, invitó al Bachiller Valdivia Mera, Gustavo Cesar a realizar una exposición de Trabajo de Tesis titulada: "Sobre la relación subyacente al entrelazamiento cuántico y los agujeros de gusano: ER=EPR".

Concluida la exposición del candidato y luego de las preguntas de rigor por parte del Jurado, el Presidente, invitó al Bachiller y al público a abandonar momentáneamente la Sala de Sesión, para dar paso a la deliberación y calificación por parte del Jurado.

Al término de la deliberación del Jurado el Dr. Fulgencio Villegas Silva, invitó al candidato y al público a pasar a la Sala de Sesión, para dar lectura al resultado de la deliberación. Ha obtenido la calificación de:

MUY BUENO
(MENCIÓN)

18
(NÚMERO)

Dieccho
(LETRAS)

Finalmente, el Presidente del Jurado, propone al consejo de la Facultad que se le declare Licenciado en Física al Bachiller Valdivia Mera, Gustavo Cesar. Siendo las 15:30 Horas, se levanta la Sesión.


Dr. Fulgencio Villegas Silva
PRESIDENTE


Dr. Pablo Héctor Rivera Riofano
MIEMBRO


Dr. Teófilo Vargas Auccalla
ASESOR


Dr. Rafael Edgardo Carlos Reyes
SUPLENTE

A mi familia.

Agradecimientos

Gracias a mi familia, Consuelo, Heber y Héctor, por su enorme amor, paciencia y esfuerzo. Por brindarme siempre una vida plena.

Gracias a mi asesor, Prof. Teófilo Vargas, y al Prof. Fulgencio Villegas, miembros del GFT-UNMSM, por sus consejos, enseñanzas y orientación hacia la física teórica.

Gracias a mi esposa, Ross Alva, una mujer noble e intelectual, luz en momentos oscuros, y paz en la tempestad.

Agradezco el financiamiento otorgado por el Programa de Tesis de Pregrado del VRI-UNMSM para la realización de este trabajo con código B18131074.

Finalmente, gracias a la Universidad Nacional Mayor de San Marcos, la cual, con sus altos y bajos, ha sabido proporcionar grandes intelectuales al servicio de nuestra nación. Espero mis pasos sean reflejo de ello.

Índice de contenidos

Agradecimientos	iii
Índice de contenidos	v
Índice de figuras	vii
Resumen	ix
Introducción	1
1. Del plano a las cuñas:	
Espacio-tiempo de Rindler	3
1.1. Observador acelerado en fondo plano	3
1.2. De Minkowski (t, x) a Rindler (τ, ξ)	10
1.3. Observaciones Finales	14
2. De la perspectiva no inercial para un fondo plano:	
Efecto Unruh	15
2.1. Á la Lorentz	15
2.1.1. Campo escalar real	15
2.1.2. Simetría conforme: $m = 0$	16
2.1.3. Modos de fourier y producto interno	17
2.1.4. Transformaciones de Bogoliubov	19
2.1.5. Efecto Unruh	23
2.2. Á la Euclides	28
2.2.1. Integral de camino Euclidiana	28
2.2.2. Estado de vacío	31
2.2.3. Función de Partición	32
2.2.4. Singularidad cónica y temperatura asociada	33
2.2.5. Matriz de densidad	34
2.2.6. Thermofield Double State	36
2.3. Observaciones Finales	42
3. Dualidad Agujero-de-Gusano/Entrelazamiento-cuántico	43
3.1. ¿Gravedad o no gravedad en 2+1?	43
3.1.1. 2 + 1 con $R_{\mu\nu} = 0$	44
3.1.2. 2 + 1 con $R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}$	46
3.2. Agujero negro de BTZ	47
3.2.1. Espacio-tiempo AdS	47

3.2.2. De AdS a BTZ	49
3.2.3. Límite cerca del horizonte	54
3.2.4. Temperatura de Hawking	55
3.2.5. Integral de camino gravitacional	56
3.2.6. Geometría asintótica	61
3.2.7. Estructura global: Diagrama de Penrose-Carter	62
3.3. Dual holográfico de BTZ	67
3.4. $ER=EPR$	70
Conclusiones	73
A. Coordenadas nulas	75
B. Transformación Conforme	77
C. Tiempo Imaginario y Espacio Euclidiano	81
D. Estados puros, mixtos y entrelazados	83
D.1. Matriz de densidad pura	83
D.2. Matriz de densidad mixta	83
D.3. Matriz de densidad reducida	84
D.3.1. Estados producto	84
D.3.2. Estados entrelazados	85
E. Operadores antilineales y antiunitarios	87
E.1. Operador antilineal	87
E.2. Operador antiunitario	88
F. AdS conforme a Minkowski	89
G. Orientación temporal en la geometría extendida de BTZ	91
H. Representación cilíndrica de AdS	93
Bibliografía	95

Índice de figuras

1.1. Regiones del espacio-tiempo Rindler	6
1.2. Estructura causal del espacio-tiempo Rindler y evolución de τ en las cuñas derecha e izquierda.	8
1.3. Cuña derecha del espacio-tiempo Rindler con g constante. Las líneas rectas son aquellas a τ constante, mientras las hipérbolas, a ξ constante.	12
1.4. Cuña izquierda del espacio-tiempo Rindler con g constante. Las líneas rectas son aquellas a τ constante, mientras las hipérbolas, a ξ constante.	13
2.1. Propagación de los estados del operador de campo en Rindler.	38
3.1. Diagrama de Penrose-Carter para el espacio-tiempo BTZ	66
3.2. Regiones asintóticas $r \rightarrow \infty$ de BTZ	67
3.3. Geometría Euclidiana y Lorentziana de BTZ unida en $t = 0$	68
3.4. Topología de la integral de camino Euclidiana para la teoría cuántica de campos dual a BTZ	68
3.5. N pares de partículas entrelazadas sobre sobre AdS_3	70
3.6. Agujero de Gusano conectando el interior de los agujeros negros derecho e izquierdo.	71
H.1. Representación cilíndrica de AdS_3	94

Resumen

Iniciamos abordando el análisis de una Teoría Cuántica de Campos (1+1) con simetría conforme (*CFT*) [1] en un sistema de referencia no inercial con aceleración constante. Bajo esta premisa, se muestra que el valor esperado del número de partículas, definido a partir de los operadores de creación y aniquilación del campo, en el sistema acelerado (espacio-tiempo Rindler derecho e izquierdo), y el vacío cuántico de la geometría de fondo (espacio-tiempo Minkowski), obedece la distribución de Bose-Einstein, con temperatura proporcional al módulo de la aceleración, antes mencionada. Asimismo, estos resultados se confirman mediante la aplicación de la Rotación de Wick sobre la métrica Rindler.

Luego, se determina la Matriz de Densidad para la teoría, cuyas trazas parciales definen los estados térmicos en las regiones derecha e izquierda, a partir de la cual mostramos que el vacío de la teoría es un estado entrelazado (Einstein-Podolsky-Rosen: *EPR*) de las bases del campo en las regiones estudiadas, conocido como Thermofield Double State (*TFD*) (Revisar [2][3][4]), el cual es desarrollado en detalle, a fin de evitar cualquier ambigüedad en su aplicación. Esta parte acaba mostrando que la Integral de Camino Euclidiana, que prepara el estado *TFD* para su evolución, está definida en una variedad de topología: $\beta/2 \otimes S^1$.

Posteriormente, se realiza un análisis gravitacional, donde se interpreta la física de los tensores de Riemann y Weyl en $d = 2+1$ para $T_{\mu\nu} = 0$, cuando: $\Lambda = 0$ y $\Lambda = -1/l^2$ (Anti-de Sitter - *AdS*₃). A continuación, se presenta la solución *BTZ* (2 + 1) [5][6], la cual posee Agujero Negro y es asintóticamente *AdS*₃, y se calcula su acción euclidiana, sobre la cual se ha impuesto la periodicidad de los campos gravitacionales en el tiempo imaginario $\tau \sim \tau + \beta$, para encontrar la Función de Partición y obtener sus parámetros termodinámicos: entropía, temperatura y energía.

Después, se desarrolla la geometría extendida y se construye el diagrama de Penrose-Carter, en donde se observan dos regiones, asintóticamente AdS_3 , causalmente desconectadas, unidas mediante un agujero de gusano (Puente de Einstein-Rosen: ER).

Finalmente, del estudio de la teoría de campos y en amparo de la correspondencia AdS/CFT [7][8][9], se observa que las $CFTs$ entrelazadas, que componen el estado TFD , son duales a las AdS_3 que conforman las regiones asintóticas de BTZ . Por consiguiente, la estructura topológica de la variedad sobre la cual se define la Integral de Camino Euclidiana que preparada el estado TFD , concuerda con la mitad del borde de BTZ en notación euclidiana, donde la longitud propia del tiempo imaginario es $\beta/2$ (semicircunferencia). De esta manera, queda manifiesta la dualidad entre el estado TFD y la geometría extendida BTZ , mostrando así la relación subyacente al Entrelazamiento Cuántico y los Agujeros de Gusano: $ER = EPR$.

Introducción

Los sobresalientes trabajos de Hawking y Bekenstein, en los 70's [10] [11] [12] [13], mostraron que los agujeros negros, desprendidos de la Teoría General de la Relatividad, poseen termodinámica. Precisamente, se evidenció que la entropía de estos objetos es proporcional al área de su horizonte de sucesos. De esta forma, la información contenida en un cierto volumen se determinará a partir de su frontera. Más tarde, Leonard Susskind (1994) generalizaría esta idea en lo que conocemos como 'Principio Holográfico' [14], inspirado en los trabajos de 't Hooft [15] y Bekenstein [16].

Años más tarde, Juan Maldacena (1998) llevó a cabo la primera realización, en términos de teorías de campos cuánticos y gravedad, del Principio Holográfico: La correspondencia AdS/CFT [7] (Además, revisar [8][9]). Esta fundamenta la dualidad entre una teoría gravitacional en el espacio-tiempo AdS , y una teoría cuántica de campos, con simetría conforme CFT [1], donde esta última posee una dimensión espacial menos, y cuya topología se corresponde con el borde de la anterior.

En la actualidad se busca comprender la naturaleza del espacio-tiempo, a partir de relaciones entre geometría y teoría de campos. Esta tesis encamina sus esfuerzos en dicho objetivo, presentando al final la relación que subyace al 'Entrelazamiento Cuántico' y los 'Agujeros de Gusano'.

Objetivos

- **General:** Aplicar la correspondencia AdS/CFT , con el fin de elevar la comprensión de la naturaleza del espacio-tiempo, a partir de relaciones geométricas duales a teorías de campos.
- **Específico:** Mostrar, en base a la correspondencia AdS/CFT , la dualidad entre el entrelazamiento cuántico y los agujeros de gusano: $ER = EPR$.

Capítulo 1

Del plano a las cuñas: Espacio-tiempo de Rindler

En este capítulo realizaremos la construcción detallada de la transformación de coordenadas entre el sistema inercial (t, x) y aquel bajo aceleración constante (τ, ξ) , denominado Rindler (Revisar [17]). Ambos sobre el mismo fondo: Minkowski.

1.1. Observador acelerado en fondo plano

Sea $x^\mu = (x^0; x^1) = (t; x)$ ¹ la posición² de un sistema acelerado, visto desde un sistema inercial en un fondo plano, Minkowski $(1+1)$, con métrica diagonal:

$$\eta_{\mu\nu} \rightarrow (-1; 1) \quad (1.1)$$

Si bien, la velocidad espacial de un sistema no inercial es variable, se pueden efectuar las transformaciones de Lorentz para cada instante.

Considerando la siguiente velocidad espacial para cada valor de t : $v = v(t) \rightarrow \gamma = \gamma(t)$. Entonces, la velocidad será:

$$u^\mu = (u^0; u^1) = \left(\frac{dx^0}{d\tau}; \frac{dx^1}{d\tau} \right) \quad (1.2)$$

Donde:

$$\tau = \frac{t}{\gamma} \quad (1.3)$$

$$\gamma = (1 - v^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (1.4)$$

¹En toda la tesis usaremos unidades naturales: $G = \kappa = c = \hbar = 1$.

²Al referirnos a la posición, velocidad, aceleración, etc., estaremos haciendo referencia a vectores espacio-temporales. Por otro lado, al referirnos a magnitudes espaciales, lo especificaremos.

Luego, se obtiene:

$$u^\mu = (\gamma; \gamma v) \quad (1.5)$$

Su longitud será:

$$\eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = u^\mu u_\mu = -1 \quad (1.6)$$

Tomando la derivada de la expresión anterior, se tiene:

$$a^\mu u_\mu = 0 \quad (1.7)$$

Donde $a^\mu = (a^0; a^1)$ es la aceleración.

Considerando que el sistema no inercial se desplaza con aceleración espacial constante $g > 0$. Entonces, para el observador situado en el origen de dicho sistema, tendremos:

$$v = 0 \quad (1.8)$$

$$\gamma = 1 \quad (1.9)$$

Luego, en su perspectiva:

$$a^\mu = (0; g) \quad (1.10)$$

$$\frac{dg}{dt} = 0 \quad (1.11)$$

Asimismo, en virtud de las transformaciones de Lorentz en cada instante, podemos aplicar la invariancia de la longitud de la aceleración:

$$a^\mu a_\mu = a^0 a_0 + a^1 a_1 = g^2 \quad (1.12)$$

Expresando (1.6), (1.7) y (1.12) en términos contravariantes:

$$-(u^0)^2 + (u^1)^2 = -1 \quad (1.13)$$

$$-a^0 u^0 + a^1 u^1 = 0 \quad (1.14)$$

$$-(a^0)^2 + (a^1)^2 = g^2 \quad (1.15)$$

De estas tres expresiones, obtenemos:

$$\begin{aligned} a^1 &= gu^0 \\ a^0 &= gu^1 \end{aligned} \quad (1.16)$$

Derivando respecto de τ y aplicando las mismas igualdades:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u^0}{d\tau^2} &= g^2 u^0 \\ \frac{d^2 u^1}{d\tau^2} &= g^2 u^1 \end{aligned} \quad (1.17)$$

Donde, para $t = 0 \rightarrow \tau = 0$, se tiene $v = 0$. Esto implica:

$$u^\mu(\tau = 0) = (1; 0) \quad (1.18)$$

$$a^\mu(\tau = 0) = (0; g) \quad (1.19)$$

Solucionando la ecuación diferencial para u^0 y u^1 , y aplicando las condiciones en $t = 0$, obtenemos:

$$\begin{aligned} u^1 &= \frac{\partial x^1}{\partial \tau} = \sinh(g\tau) \\ u^0 &= \frac{\partial x^0}{\partial \tau} = \cosh(g\tau) \end{aligned} \quad (1.20)$$

Integrando:

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{g} \cosh(g\tau) \\ t &= \frac{1}{g} \sinh(g\tau) \end{aligned} \quad (1.21)$$

(1.21) es el mapeo dado por un observador en el origen del sistema inercial (t, x) respecto de la posición de otro situado en el origen del sistema bajo aceleración constante g , donde τ es el tiempo propio de este último. Además:

$$x^2 - t^2 = \frac{1}{g^2} \quad (1.22)$$

$$\frac{t}{x} = \tanh(g\tau) \quad (1.23)$$

Asimismo, de (1.21), como era de esperarse:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 = -d\tau^2 \quad (1.24)$$

Donde τ es el único valor del elemento de línea del sistema no inercial. Además, en dicho sistema la métrica es independiente de τ . En consecuencia, ∂_τ es un vector Killing:

$$\partial_\tau = \frac{\partial t}{\partial \tau} \partial_t + \frac{\partial x}{\partial \tau} \partial_x \quad (1.25)$$

$$\partial_\tau = g(x\partial_t + t\partial_x) \quad (1.26)$$

El cual, mientras genera traslaciones temporales en Rindler, en Minkowski, Boosts. Dicho vector Killing puede escribirse en componentes contravariantes:

$$b^\mu = (b^0; b^1) = (gx; gt) \quad (1.27)$$

Por otro lado, la transformación (1.21) sólo concierne a la región $|t| < x$, denominada ‘cuña derecha’ (región I en la Figura 1.1), la cual es una porción de la geometría de fondo: Minkowski.

Para definir la transformación adecuada para la ‘cuña izquierda’ (región IV en la Figura 1.1) se debe analizar el comportamiento del vector Killing b^μ en las regiones I, II, III y IV.

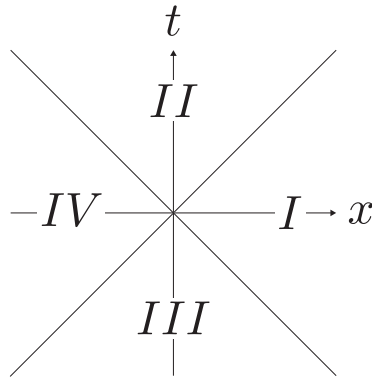


Figura 1.1: Regiones del espacio-tiempo Rindler

Las regiones (espacio-temporales) mostradas en la Figura 1.1 están determinadas por las siguientes desigualdades:

$$I : -x < t < x \quad (1.28)$$

$$II : x < t \cap -x < t \quad (1.29)$$

$$III : t < x \cap t < -x \quad (1.30)$$

$$IV : x < t < -x \quad (1.31)$$

Luego, la longitud de b^μ será:

$$b^\mu b_\mu = -g^2 x^2 + g^2 t^2 = g(t+x)(t-x) \quad (1.32)$$

De (1.28), (1.29), (1.30) y (1.31), b^μ , tal como se presenta en (1.32), será en cada región:

$$I : b^\mu b_\mu < 0 \rightarrow \text{Tipo} - \text{tiempo} \quad (1.33)$$

$$II : b^\mu b_\mu > 0 \rightarrow \text{Tipo} - \text{espacio} \quad (1.34)$$

$$III : b^\mu b_\mu > 0 \rightarrow \text{Tipo} - \text{espacio} \quad (1.35)$$

$$IV : b^\mu b_\mu < 0 \rightarrow \text{Tipo} - \text{tiempo} \quad (1.36)$$

La longitud de b^μ (1.32) es nula en las fronteras $x = \pm t$. Por lo tanto, dichas fronteras son los horizontes Killing.

De lo visto, hasta el momento, inferimos que la transformación de $x = x(\tau)$ para la región IV (cuña izquierda) definida por (1.31), donde $x < 0$, será:

$$x = -\frac{1}{g} \cosh(g\tau) \quad (1.37)$$

No obstante, para definir la transformación $t = t(\tau)$, en la misma región (IV), se debe analizar si τ se dirige hacia el pasado o futuro de t , a partir de b^μ .

Para ello, usamos el vector unitario temporal:

$$\partial_t \rightarrow t^\mu = (1; 0) \quad (1.38)$$

Luego:

- b^μ será dirigida al futuro de t si $b^\mu t_\mu < 0$.
- b^μ será dirigida al pasado de t si $b^\mu t_\mu > 0$.

De la definición de b^μ (1.27) y t^μ (1.38), para IV ($x < 0$) se tiene:

$$b^\mu t_\mu = (gx; gt) \cdot (-1; 0) = -gx > 0 \quad (1.39)$$

Por lo tanto, en IV, τ evoluciona en dirección opuesta a t . De esta manera, la transformación $x = x(\tau)$ y $t = t(\tau)$ en dicha región (IV: $|t| < -x$), será:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{1}{g} \cosh(g\tau) \\ t &= -\frac{1}{g} \sinh(g\tau) \end{aligned} \quad (1.40)$$

De la misma forma, para I ($x > 0$), tenemos que $b^\mu t_\mu < 0$. Por lo tanto, τ y t evolucionan en la misma dirección, lo cual resulta obvio a partir de la transformación (1.21).

Por otro lado, de (1.24), apreciamos que las transformaciones (1.21) y (1.40), quienes definen el mapeo al sistema propio del observador acelerado, mantienen invariantes las geodésicas nulas, i.e., podemos insertar conos de luz para analizar la estructura causal de las regiones bajo estudio (Figura 1.2).

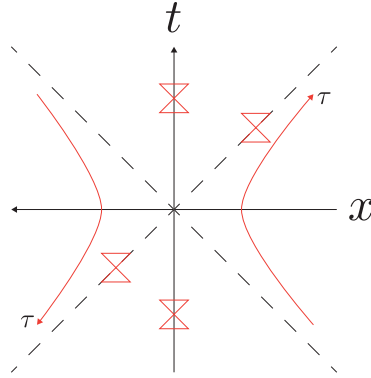


Figura 1.2: Estructura causal del espacio-tiempo Rindler y evolución de τ en las cuñas derecha e izquierda.

De la Figura 1.2 se observa:

- Las regiones II y III son causalmente equivalentes a los agujeros negro y blanco, respectivamente.
- Las fronteras $x = \pm t$ son causalmente equivalentes a los horizontes de sucesos.
- Las regiones I y IV están causalmente desconectadas.

Luego, mientras que en las regiones I y IV, b^μ es tipo-tiempo, en II y III, tipo-espacio. Por tal motivo, en estas últimas, la signatura de τ , en la métrica, cambia de $-$ a $+$ al ingresar al interior de las regiones II y III. Además, en la región IV, τ evoluciona hacia el pasado de t , tal como sucede en el análisis de la geometría extendida de Schwarzschild.

1.2. De Minkowski (t, x) a Rindler (τ, ξ)

De la sección anterior, (1.21) y (1.40) únicamente brindan el mapeo para la posición de un observador situado en el origen del sistema no inercial. No obstante, esto no permite analizar completamente su perspectiva, solo proporciona información del tiempo propio τ . Por tal motivo, es importante introducir las coordenadas espacio-temporales para el sistema de referencia bajo aceleración constante g .

Para ello, las transformaciones hiperbólicas (1.21) se expresan en términos exponenciales³:

$$x = \frac{\frac{e^{g\tau}}{g} + \frac{e^{-g\tau}}{g}}{2} \quad (1.41)$$

$$t = \frac{\frac{e^{g\tau}}{g} - \frac{e^{-g\tau}}{g}}{2} \quad (1.42)$$

Las coordenadas nulas (Apéndice A) para $(t; x)$ son:

$$\bar{v} = t + x \quad (1.43)$$

$$\bar{u} = t - x \quad (1.44)$$

Luego:

$$t = \frac{\bar{v} + \bar{u}}{2} \quad (1.45)$$

$$x = \frac{\bar{v} - \bar{u}}{2} \quad (1.46)$$

De (1.41)-(1.46), se identifica:

$$\bar{v} = \frac{e^{g\tau}}{g} \quad (1.47)$$

$$\bar{u} = -\frac{e^{-g\tau}}{g} \quad (1.48)$$

Despejando τ en (1.47) y (1.48), y sumando dichos resultados:

$$\tau = \frac{\frac{1}{g} \ln(\bar{v}g) + \left(-\frac{1}{g} \ln(-\bar{u}g)\right)}{2} \quad (1.49)$$

Las coordenadas nulas para el sistema de referencia bajo aceleración constante g ,

³El tratamiento es análogo para (1.40). Por lo tanto, se extrapolarán los resultados del análisis en curso.

serán:

$$v = \tau + \xi \quad (1.50)$$

$$u = \tau - \xi \quad (1.51)$$

Donde ξ es la coordenada espacial que se ha asignado al sistema de referencia no inercial. De esta forma, este marco de referencia adquiere un sistema coordenado completo $(\tau; \xi)$.

Luego:

$$\tau = \frac{v + u}{2} \quad (1.52)$$

$$\xi = \frac{v - u}{2} \quad (1.53)$$

De (1.49) y (1.52), identificamos:

$$\bar{v} = \frac{1}{g} e^{gv} \quad (1.54)$$

$$\bar{u} = -\frac{1}{g} e^{-gu} \quad (1.55)$$

De (1.45), (1.50) y (1.51):

$$t = \frac{1}{2g} e^{gv} - \frac{1}{2g} e^{-gu} \quad (1.56)$$

$$t = \frac{1}{2g} e^{g(\tau+\xi)} - \frac{1}{2g} e^{-g(\tau-\xi)} \quad (1.57)$$

Se obtiene:

$$t = \frac{e^{g\xi}}{g} \left(\frac{e^{g\tau} - e^{-g\tau}}{2} \right) \quad (1.58)$$

De (1.46), (1.50) y (1.51):

$$x = \frac{1}{2g} e^{gv} + \frac{1}{2g} e^{-gu} \quad (1.59)$$

$$x = \frac{1}{2g} e^{g(\tau+\xi)} + \frac{1}{2g} e^{-g(\tau-\xi)} \quad (1.60)$$

Se obtiene:

$$x = \frac{e^{g\xi}}{g} \left(\frac{e^{g\tau} + e^{-g\tau}}{2} \right) \quad (1.61)$$

Dadas las formas exponenciales de las funciones hiperbólicas, de (1.58) y (1.61), tenemos:

$$x = \frac{e^{g\xi}}{g} \cosh(g\tau) \quad (1.62)$$

$$t = \frac{e^{g\xi}}{g} \sinh(g\tau) \quad (1.63)$$

De (1.62):

$$x^2 - t^2 = \frac{e^{2g\xi}}{g^2} \quad (1.64)$$

$$\frac{t}{x} = \tanh(g\tau) \quad (1.65)$$

El mapeo (1.62) entre las coordenadas del sistema de referencia inercial (t, x) y el no inercial (τ, ξ) está definido en la región I , donde habita el observador acelerado (Cuña derecha: $|t| < x$), de la Figura 1.3, obtenida de (1.64) y (1.65).

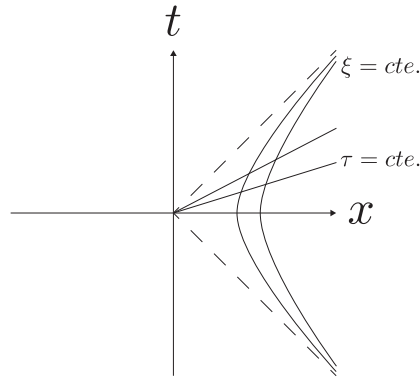


Figura 1.3: Cuña derecha del espacio-tiempo Rindler con g constante. Las líneas rectas son aquellas a τ constante, mientras las hipérbolas, a ξ constante.

Luego, de (1.62) se obtiene el elemento de línea del espacio-tiempo Rindler (τ, ξ) :

$$ds^2 = e^{2g\xi}(-d\tau^2 + d\xi^2) \quad (1.66)$$

Como podemos ver en la métrica, al igual que en la sección anterior, esta es independiente de τ ; por tal motivo, y en vista a las transformaciones (1.62), se obtiene el mismo vector Killing (1.27): $b^\mu = (gx; gt)$.

Además, de la longitud de b^μ y su producto con el vector unitario temporal $t^\mu = (1; 0)$:

- b^μ es un tipo-tiempo, dirigido hacia el futuro de t en la región I.
- b^μ es un tipo-tiempo, dirigido hacia el pasado de t en la región IV.
- b^μ es un tipo-espacio en las regiones II y III.
- b^μ es tipo-luz (nulo) en las superficies $x = \pm t$ (horizontes Killing).

Para la cuña izquierda del espacio-tiempo Rindler, definida en la región IV, donde habita el observador acelerado, ($|t| < -x$, Figura 1.4):

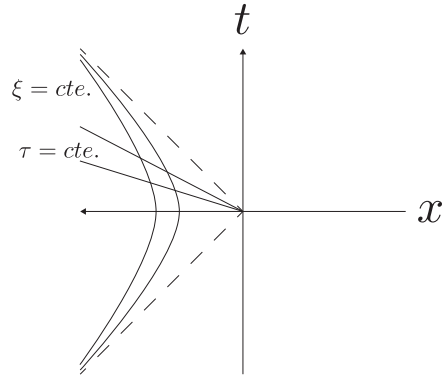


Figura 1.4: Cuña izquierda del espacio-tiempo Rindler con g constante. Las líneas rectas son aquellas a τ constante, mientras las hipérbolas, a ξ constante.

La transformación será:

$$x = -\frac{e^{g\xi}}{g} \cosh(g\tau) \quad (1.67)$$

$$t = -\frac{e^{g\xi}}{g} \sinh(g\tau) \quad (1.68)$$

Esta transformación, obviamente, genera el elemento de línea (1.66) y cumple las relaciones (1.64) y (1.65).

1.3. Observaciones Finales

Las regiones I y IV, dadas por $|t| < \pm x$, denominadas cuñas derecha (+) e izquierda (−) del espacio-tiempo Rindler, causalmente desconectadas, definen las zonas de acceso para los observadores bajo aceleración constante sobre el fondo de Minkowski $(1+1)$.

Además, la percepción del sistema no inercial se interpreta a partir de la geometría del espacio-tiempo Rindler (τ, ξ) , el cual es conforme a Minkowski (1.66):

$$g_{\mu\nu} = e^{2g\xi} \eta_{\mu\nu} \quad (1.69)$$

Por lo tanto, se mantienen invariantes las geodésicas nulas (Apéndice B). De esta forma, es posible introducir los conos de luz, igual que en la Figura 1.2, e interpretar la estructura causal determinada por la métrica:

$$ds^2 = e^{2g\xi} (-d\tau^2 + d\xi^2) \quad (1.70)$$

Tenemos:

- Las regiones II y III son causalmente equivalentes a los agujeros negro y blanco, respectivamente.
- Las fronteras $x = \pm t$ son causalmente equivalentes a los horizontes de sucesos.
- Las regiones I y IV están causalmente desconectadas.

Finalmente, de todo lo expuesto, estamos en condiciones de establecer la teoría de campos sobre las geometrías estudiadas. Lo cual será materia del siguiente capítulo.

Capítulo 2

De la perspectiva no inercial para un fondo plano: Efecto Unruh

En este capítulo analizaremos la perspectiva física del observador no inercial respecto del vacío en la geometría de fondo. Además, mediante la aplicación de métodos Euclidianos desarrollaremos en detalle la construcción del Thermofield Double State y encontraremos el vínculo entre geometría y termodinámica.

2.1. Á la Lorentz

2.1.1. Campo escalar real

La acción del campo escalar real sobre un fondo 1+1 con métrica $g_{\mu\nu}$ (Revisar [18]) es:

$$I = \int dt dx \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int dt dx \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right) \quad (2.1)$$

La ecuación de movimiento obtenida se denomina Klein-Gordon:

$$(-\partial_0^2 + \partial_1^2 - m^2)\phi \rightarrow (\square - m^2)\phi = 0 \quad (2.2)$$

Realizando el proceso conocido como segunda cuantización, el operador de campo escalar cuántico¹, expresado en modos de fourier, será:

$$\phi(x^\mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a(k)e^{ik^\mu x_\mu} + a^\dagger(k)e^{-ik^\mu x_\mu}) \quad (2.3)$$

Los operadores $a^\dagger(k)$ y $a(k)$, de creación y aniquilación, respectivamente, satisfacen:

$$[a(k); a^\dagger(k')] = \delta(k - k') \quad (2.4)$$

$$[a(k); a(k')] = [a^\dagger(k); a^\dagger(k')] = 0 \quad (2.5)$$

Separando la expresión para el operador de campo en $k > 0$ y $k < 0$:

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a(k)e^{ik^\mu x_\mu} + a^\dagger(k)e^{-ik^\mu x_\mu}) \\ + \int_{-\infty}^0 \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a(k)e^{ik^\mu x_\mu} + a^\dagger(k)e^{-ik^\mu x_\mu}) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Cambiando $k \rightarrow -k$ en el segundo término, podemos expresar el operador de campo cuántico de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \phi(x^\mu) = \int_0^\infty \frac{dk}{\sqrt{4\pi\omega_k}} (a(k)e^{i(-\omega t + kx)} + a^\dagger(k)e^{-i(-\omega t + kx)}) \\ + b_k e^{i(-\omega t - kx)} + b^\dagger(k)e^{-i(-\omega t - kx)} \end{aligned} \quad (2.7)$$

Donde $b(k) = a(-k)$.

2.1.2. Simetría conforme: $m = 0$

Dada la transformación conforme² [1]:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \rightarrow \tilde{g}^{\mu\nu} = \Omega^{-2} g^{\mu\nu} \quad (2.8)$$

$$\sqrt{-\tilde{g}} = \Omega^2 \sqrt{-g} \quad (2.9)$$

Notamos que la acción (2.1), debido al término de masa, no es invariante bajo dicha transformación.

¹Por simplicidad, no usaremos sombrero en los operadores, asumiendo que el lector conoce la nomenclatura: $\hat{\phi} = \phi$ y $\hat{a}(k) = a(k)$.

²En $1 + 1$, la dimensión de escala del campo escalar no masivo es cero: $\Delta = 0$.

Por lo tanto, haciendo $m = 0$ en (2.1):

$$I = \int dt dx \sqrt{-g} \mathcal{L} = \int dt dx \sqrt{-g} \left(-\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \right), \quad (2.10)$$

Nos aseguramos de obtener una acción invariante bajo transformaciones conformes³, i.e., una CFT:

$$I = \int dt dx \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi \rightarrow \int dt dx \Omega^2 \sqrt{-g} \Omega^{-2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi = I \quad (2.11)$$

Como sabemos, la métrica del espacio-tiempo Rindler $g_{\mu\nu}$ es conforme a Minkowski $\eta_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = e^{2g\xi} (-d\tau^2 + d\xi^2) \quad (2.12)$$

Por lo tanto, en Minkowski (t, x) y Rindler (τ, ξ) se tendrá la misma ecuación de movimiento:

$$\square \phi(t, x) = \square \phi(\tau, \xi) = 0 \quad (2.13)$$

2.1.3. Modos de fourier y producto interno

Debido a la invariancia conforme, nuestro operador de campo cuántico en Minkowski y Rindler (cuña derecha o izquierda)⁴ será:

$$\phi(t, x) = \int_0^\infty d\omega (a(\omega) f_\omega + a^\dagger(\omega) f_\omega^* + b(\omega) g_\omega + b^\dagger(\omega) g_\omega^*) \quad (2.14)$$

$$\phi(\tau, \xi) = \int_0^\infty d\omega (c(\omega) h_\omega + c^\dagger(\omega) h_\omega^* + d(\omega) j_\omega + d^\dagger(\omega) j_\omega^*) \quad (2.15)$$

En ambas expresiones, los operadores de creación y aniquilación,

$$\{a_\omega, a_\omega^\dagger, b_\omega, b_\omega^\dagger, c_\omega, c_\omega^\dagger, d_\omega, d_\omega^\dagger\} \quad (2.16)$$

Satisfacen las relaciones de conmutación (2.4) y (2.5).

³El tensor de energía-momento para el campo escalar real sin masa en 1+1 tiene traza nula. Evidentemente, estamos ante una teoría invariante de escala.

⁴En ambas cuñas se tiene el mismo elemento de línea que define el factor conforme a Minkowski. Por tal motivo, en cada una de dichas regiones existe un operador de campo acorde con (2.15).

Además, los modos de fourier, tal como se mostró en (2.7), serán:

$$f_\omega = \frac{e^{-i\omega(t-x)}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.17)$$

$$g_\omega = \frac{e^{-i\omega(t+x)}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.18)$$

$$h_\omega = \frac{e^{-i\omega(\tau-\xi)}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.19)$$

$$j_\omega = \frac{e^{-i\omega(\tau+\xi)}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.20)$$

Los modos f_ω son identificados como aquellos que van hacia a la derecha, mientras que los modos g_ω lo hacen hacia a la izquierda (lo mismo para h_ω y j_ω , respectivamente). Además, cada uno de ellos representa una base completa para el operador de campo Klein-Gordon.

Se define el producto interno de Klein-Gordon:

$$\langle h_\omega, h_{\omega'} \rangle := -i \int dx \sqrt{-g} [h_\omega (\partial_t h_{\omega'}^*) - (\partial_t h_\omega) h_{\omega'}^*] \quad (2.21)$$

Por ejemplo, para el modo (2.17) en frecuencias ω y ω' :

$$\begin{aligned} \langle f_\omega, f_{\omega'} \rangle &= -i \int dx \left[\frac{e^{-i\omega(t-x)}}{\sqrt{4\pi\omega}} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{i\omega'(t-x)}}{\sqrt{4\pi\omega'}} \right) - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{e^{-i\omega(t-x)}}{\sqrt{4\pi\omega}} \right) \frac{e^{i\omega'(t-x)}}{\sqrt{4\pi\omega'}} \right] \\ &= \frac{e^{it(\omega'-\omega)}}{2\sqrt{\omega'\omega}} (\omega' + \omega) \int dx \frac{e^{-ix(\omega'-\omega)}}{2\pi} \end{aligned}$$

Obtenemos:

$$\langle f_\omega, f_{\omega'} \rangle = \delta(\omega' - \omega) \quad (2.22)$$

Procediendo de forma similar, encontramos los siguientes productos:

$$\langle f_\omega, f_{\omega'} \rangle = \delta(\omega - \omega') \quad (2.23)$$

$$\langle f_\omega^*, f_{\omega'}^* \rangle = -\delta(\omega - \omega') \quad (2.24)$$

$$\langle f_\omega^*, f_{\omega'} \rangle = 0 \quad (2.25)$$

$$\langle g_\omega, g_{\omega'} \rangle = \delta(\omega - \omega') \quad (2.26)$$

$$\langle g_\omega^*, g_{\omega'}^* \rangle = -\delta(\omega - \omega') \quad (2.27)$$

$$\langle g_\omega^*, g_{\omega'} \rangle = \langle g_\omega, g_{\omega'}^* \rangle = 0 \quad (2.28)$$

Además, notamos que los modos hacia la derecha e izquierda se encuentran desacoplados:

$$\langle f_\omega, g_{\omega'} \rangle = \langle f_\omega, g_{\omega'}^* \rangle = 0 \quad (2.29)$$

Para los modos de Fourier en Rindler $\{h_\omega; j_\omega\}$, los resultados son análogos.

Dada la forma del producto interno (2.21), su complejo conjugado cumplirá la siguiente propiedad:

$$\langle k_\omega, p_{\omega'} \rangle^* = -\langle k_\omega^*, p_{\omega'}^* \rangle = \langle p_{\omega'}, k_\omega \rangle \quad (2.30)$$

2.1.4. Transformaciones de Bogoliubov

Las coordenadas nulas $\{\bar{u}, \bar{v}; u, v\}$ para Minkowski (t, x) y Rindler (τ, ξ) , serán:

$$\bar{u} = t - x \quad (2.31)$$

$$\bar{v} = t + x \quad (2.32)$$

$$u = \tau - \xi \quad (2.33)$$

$$v = \tau + \xi \quad (2.34)$$

De esta forma, la transformación de coordenadas:

$$\partial_{\mu'} = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^{\mu'}} \partial_\nu \quad (2.35)$$

Nos permite encontrar las ecuaciones de movimiento (2.13) en coordenadas Nulas. Por ejemplo, para Minkowski:

$$\partial_t = \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} \partial_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} \partial_{\bar{v}} = \partial_{\bar{u}} + \partial_{\bar{v}} \quad (2.36)$$

$$\partial_x = \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} \partial_{\bar{u}} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial x} \partial_{\bar{v}} = -\partial_{\bar{u}} + \partial_{\bar{v}} \quad (2.37)$$

Haciendo lo mismo para Rindler, obtenemos las siguientes ecuaciones de movimiento en coordenadas nulas:

$$\partial_{\bar{u}}\partial_{\bar{v}}\phi = 0 \quad (2.38)$$

$$\partial_u\partial_v\phi = 0 \quad (2.39)$$

Luego, para Minkowski y Rindler, respectivamente, los operadores de campo de serán:

$$\phi(\bar{u}, \bar{v}) = \phi(\bar{u}) + \phi(\bar{v}) \quad (2.40)$$

$$\phi(u, v) = \phi(u) + \phi(v) \quad (2.41)$$

Dada la ecuación de movimiento (2.38) (lo mismo para Rindler (2.39)), notamos que los operadores correspondientes a los modos hacia la derecha $\phi(\bar{u})$ e izquierda $\phi(\bar{v})$ se encuentran desacoplados, tal como se infiere de (2.29).

Donde los modos de fourier correspondientes a cada uno de dichos operadores desacoplado, acorde con (2.17) y (2.18), serán:

$$f_\omega = \frac{e^{-i\omega\bar{u}}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.42)$$

$$g_\omega = \frac{e^{-i\omega\bar{v}}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.43)$$

Expresando $\phi(\bar{u})$ y $\phi(\bar{v})$ en dichas bases:

$$\phi(\bar{u}) = \int_0^\infty d\omega (a(\omega)f_\omega + a^\dagger(\omega)f_\omega^*) \quad (2.44)$$

$$\phi(\bar{v}) = \int_0^\infty d\omega (b(\omega)g_\omega + b^\dagger(\omega)g_\omega^*) \quad (2.45)$$

Sumando ambas expresiones, para reproducir (2.40), obtenemos el resultado esperado (2.14). De forma análoga para Rindler, acorde con (2.19) y (2.20):

$$h_\omega = \frac{e^{-i\omega u}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.46)$$

$$j_\omega = \frac{e^{-i\omega v}}{\sqrt{4\pi\omega}} \quad (2.47)$$

Se obtienen los operadores desacoplados:

$$\phi(u) = \int_0^\infty d\omega (c(\omega)h_\omega + c^\dagger(\omega)h_\omega^*) \quad (2.48)$$

$$\phi(v) = \int_0^\infty d\omega (d(\omega)j_\omega + d^\dagger(\omega)j_\omega^*) \quad (2.49)$$

Donde, la suma de estos últimos reproducen el resultado esperado (2.15).

Comparamos las expresiones correspondiente a los modos viajando a la derecha en Minkowski y Rindler⁵, $\{\phi(\bar{u}), \phi(u)\}$, (el análisis para $\{\phi(\bar{v}), \phi(v)\}$ es análogo):

$$\int_0^\infty d\omega (a(\omega)f_\omega + a^\dagger(\omega)f_\omega^*) = \int_0^\infty d\omega' (c(\omega')h_{\omega'} + c^\dagger(\omega')h_{\omega'}^*) \quad (2.50)$$

Podemos expresar los modos de Rindler en función de aquellos en Minkowski mediante las transformaciones de Bogoliubov (Revisar [18]):

$$h_{\omega'} = \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\omega'\Omega} f_\Omega + \beta_{\omega'\Omega} f_\Omega^*) \quad (2.51)$$

Podemos obtener los coeficientes de Bogoliubov $\alpha_{\omega'\Omega}$ y $\beta_{\omega'\Omega}$ usando el producto interno de Klein-Gordon:

$$\begin{aligned} \langle h_{\omega'}, f_\omega \rangle &= \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\omega'\Omega} \langle f_\Omega, f_\omega \rangle + \beta_{\omega'\Omega} \langle f_\Omega^*, f_\omega \rangle) \\ &= \int_0^\infty d\Omega \alpha_{\omega'\Omega} \delta(\Omega - \omega) \end{aligned} \quad (2.52)$$

Obtenemos:

$$\langle h_{\omega'}, f_\omega \rangle = \alpha_{\omega'\omega} \quad (2.53)$$

De forma similar:

$$\langle h_{\omega'}, f_\omega^* \rangle = -\beta_{\omega'\omega} \quad (2.54)$$

⁵Los modos f_ω y g_ω están presentes en todo el espacio-tiempo; ya que, están definidos para el campo en Minkowski. Además, dadas las transformaciones de coordenadas (1.62) y (1.67), el espacio de Hilbert de la teoría (Minkowski), donde yacen las bases del operador de campo $\phi(t, x)$, será el producto tensorial de los espacios de Hilbert de las teorías en cada cuña (Rindler D e I); ya que, en cada una tenemos un operador de campo $\phi(\tau, \xi)$:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^D \otimes \mathcal{H}^I$$

De los dos productos usados para determinar los coeficientes de Bogoliubov y la propiedad (2.30), tenemos:

$$\langle f_\omega, h_{\omega'} \rangle = \alpha_{\omega' \omega}^* \quad (2.55)$$

$$\langle f_\omega, h_{\omega'}^* \rangle = \beta_{\omega' \omega} \quad (2.56)$$

De esta forma, obtenemos los modos en Minkowski en función de aquellos en Rindler:

$$f_\omega = \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\Omega \omega}^* h_\Omega - \beta_{\Omega \omega} h_\Omega^*) \quad (2.57)$$

También podemos obtener los operadores de creación y aniquilación de Rindler en función de aquellos en Minkowski (y viceversa) gracias a los coeficientes de Bogoliubov. Para ello, insertamos (2.57) en la expresión (2.50):

$$\int_0^\infty d\omega (a(\omega) f_\omega + a^\dagger(\omega) f_\omega^*) = \int_0^\infty d\omega \left[\begin{array}{l} a(\omega) \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\Omega \omega}^* h_\Omega - \beta_{\Omega \omega} h_\Omega^*) \\ + a^\dagger(\omega) \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\Omega \omega} h_\Omega^* - \beta_{\Omega \omega}^* h_\Omega) \end{array} \right]$$

Reordenamos y comparamos término a término con el lado derecho de (2.50):

$$\int_0^\infty d\Omega \left[\begin{array}{l} \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega \omega}^* a(\omega) - \beta_{\Omega \omega}^* a^\dagger(\omega)) h_\Omega \\ + \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega \omega} a^\dagger(\omega) - \beta_{\Omega \omega} a(\omega)) h_\Omega^* \end{array} \right] = \int_0^\infty d\Omega (c(\Omega) h_\Omega + c^\dagger(\Omega) h_\Omega^*)$$

Tenemos:

$$c(\Omega) = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega \omega}^* a(\omega) - \beta_{\Omega \omega}^* a^\dagger(\omega)) \quad (2.58)$$

Análogamente, insertando (2.51) en (2.50), se tiene:

$$a(\omega) = \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\Omega\omega} c(\Omega) + \beta_{\Omega\omega}^* c^\dagger(\Omega)) \quad (2.59)$$

Finalmente, insertando (2.57) en (2.51):

$$h_{\omega'} = \int_0^\infty d\Omega \left[\alpha_{\omega'\Omega} \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\omega\Omega}^* h_\omega - \beta_{\omega\Omega} h_\omega^*) + \beta_{\omega'\Omega} \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\omega\Omega} h_\omega^* - \beta_{\omega\Omega}^* h_\omega) \right] \quad (2.60)$$

Agrupando términos y comparando con el lado izquierdo, obtenemos las siguientes propiedades para los coeficientes de Bogoliubov:

$$\int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\omega'\Omega} \alpha_{\omega\Omega}^* - \beta_{\omega'\Omega} \beta_{\omega\Omega}^*) = \delta(\omega - \omega') \quad (2.61)$$

$$\alpha_{\omega'\Omega} \beta_{\omega\Omega} = \beta_{\omega'\Omega} \alpha_{\omega\Omega} \quad (2.62)$$

2.1.5. Efecto Unruh

Si bien podemos expresar el operador de campo ϕ en las bases (t, x) y (τ, ξ) , aún no hemos dicho nada acerca de la diferencia en la percepción de los fenómenos físicos entre ambos sistemas; ya que, mientras Minkowski es un sistema inercial, Rindler, no. Más aún, la geometría de Rindler contiene una estructura causal similar a la de un agujero negro eterno.

Por tal motivo, con el fin de describir la variación de perspectiva entre dichos sistemas de referencia, evaluaremos el valor esperado del número de partículas con energía ω en la cuña derecha de Rindler para los modos viajando a la derecha⁶, en el vacío de la teoría sobre la geometría de fondo (Minkowski):

$$\langle 0_M | N_R(\omega) | 0_M \rangle = \langle 0_M | c^\dagger(\omega) c(\omega) | 0_M \rangle \quad (2.63)$$

Insertando (2.58) en la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \langle 0_M | N_R(\omega) | 0_M \rangle &= \langle 0_M | \int_0^\infty d\Omega' (\alpha_{\omega\Omega'} a^\dagger(\Omega') - \beta_{\omega\Omega'} a(\Omega')) \\ &\quad \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\omega\Omega}^* a(\Omega) - \beta_{\omega\Omega}^* a^\dagger(\Omega)) | 0_M \rangle \end{aligned} \quad (2.64)$$

⁶El procedimiento para la cuña izquierda es análogo, de igual forma con los modos hacia la izquierda, por tal motivo sólo extrapolaremos los resultados obtenidos en esta sección.

Usando la acción de los operadores de aniquilación y creación para el campo escalar en Minkowski, $a(\Omega)$ y $a^\dagger(\Omega)$, sobre el estado de vacío:

$$a(\Omega) |0_M\rangle = 0 \quad (2.65)$$

$$a^\dagger(\Omega) |0_M\rangle = |1_M(\Omega)\rangle, \quad (2.66)$$

Llegamos a la siguiente expresión:

$$\langle 0_M | N_R(\omega) | 0_M \rangle = \int_0^\infty d\Omega |\beta_{\Omega\omega}|^2 \quad (2.67)$$

Donde la integración se realiza sobre todo el espectro de energía Ω en Minkowski. Por tal motivo, es de esperarse que dicha integral sea divergente, tal como veremos más adelante.

Por otro lado, si calculamos el valor del número de partículas con energía ω en Minkowski $N_M(\omega)$ respecto del vacío del mismo sistema:

$$\langle 0_M | N_M | 0_M \rangle = \langle 0_M | a^\dagger(\omega) a(\omega) | 0_M \rangle = 0 \quad (2.68)$$

Encontramos que las expresiones (2.67) y (2.68) varían debido a $\beta_{\Omega\omega}$, el cual, como podemos ver en (2.51), es responsable de combinar modos de norma positiva f_Ω y negativa f_Ω^* . Por lo tanto, cuando $\beta_{\Omega\omega} = 0$, los modos de Rindler h'_ω se pueden ver como una combinación lineal de aquellos en Minkowski, ambos con norma positiva o negativa:

$$h_{\omega'} = \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\omega'} \Omega f_\Omega) \quad (2.69)$$

$$h_{\omega'}^* = \int_0^\infty d\Omega (\alpha_{\omega'}^* \Omega f_\Omega^*) \quad (2.70)$$

Por lo expresado anteriormente, resulta importante conocer el valor de $\beta_{\Omega\omega}$ y sus implicancias físicas. Para ello, usaremos en la expresión (2.50) las formas explícitas de f_ω y $h_{\omega'}$ dadas en (2.42) y (2.46):

$$\int_0^\infty d\omega \left[a(\omega) \frac{e^{-i\omega \bar{u}}}{\sqrt{4\pi\omega}} + a^\dagger(\omega) \frac{e^{i\omega \bar{u}}}{\sqrt{4\pi\omega}} \right] = \int_0^\infty d\omega' \left[c(\omega') \frac{e^{-i\omega' u}}{\sqrt{4\pi\omega'}} + c^\dagger(\omega') \frac{e^{i\omega' u}}{\sqrt{4\pi\omega'}} \right] \quad (2.71)$$

De la transformación de coordenadas entre Minkowski y Rindler (1.55), tenemos:

$$\bar{u}(u) = -\frac{e^{-ug}}{g} \quad (2.72)$$

Entonces, ambos lados de la expresión (2.71) son funciones de u . Luego, con la finalidad de obtener, la misma frecuencia angular Ω en ambas expresiones, aplicamos la transformación de fourier:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega u} \int_0^\infty d\omega \left[a(\omega) \frac{e^{-i\omega \bar{u}}}{\sqrt{4\pi\omega}} + a^\dagger(\omega) \frac{e^{i\omega \bar{u}}}{\sqrt{4\pi\omega}} \right] = \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{\sqrt{2\pi}} e^{i\Omega u} \int_0^\infty d\omega' \left[c(\omega') \frac{e^{-i\omega' u}}{\sqrt{4\pi\omega'}} + c^\dagger(\omega') \frac{e^{i\omega' u}}{\sqrt{4\pi\omega'}} \right] \quad (2.73)$$

Reordenando el lado derecho de la expresión anterior:

$$\int_0^\infty \frac{d\omega'}{\sqrt{2\omega'}} \left[c(\omega') \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} e^{iu(\Omega-\omega')} + c^\dagger(\omega') \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} e^{iu(\Omega+\omega')} \right] \quad (2.74)$$

De la definición de la delta de Dirac:

$$\delta(\Omega - \omega') := \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} e^{iu(\Omega-\omega')} \quad (2.75)$$

Despejando en (2.73), obtenemos:

$$c(\Omega) = \int_0^\infty d\omega \left[\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{i(\Omega u - \omega \bar{u})} \right) a(\omega) + \left(\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} e^{i(\Omega u + \omega \bar{u})} \right) a^\dagger(\omega) \right] \quad (2.76)$$

Comparando término a término con (2.58):

$$c(\Omega) = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega\omega}^* a(\omega) - \beta_{\Omega\omega}^* a^\dagger(\omega)) \quad (2.77)$$

Los coeficientes de Bogoliubov serán:

$$\alpha_{\Omega\omega}^* = \sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} e^{i(\Omega u - \omega \bar{u})} \quad (2.78)$$

$$\beta_{\Omega\omega}^* = -\sqrt{\frac{\Omega}{\omega}} \int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} e^{i(\Omega u + \omega \bar{u})} \quad (2.79)$$

Resolviendo las integrales:

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} e^{i(\Omega u - \omega \bar{u})} = \frac{e^{\frac{\Omega\pi}{2g}}}{2\pi g} \left(\frac{g}{\omega}\right)^{-\frac{i\Omega}{g}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{g}\right) \quad (2.80)$$

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{du}{2\pi} e^{i(\Omega u + \omega \bar{u})} = \frac{e^{-\frac{\Omega\pi}{2g}}}{2\pi g} \left(\frac{g}{\omega}\right)^{-\frac{i\Omega}{g}} \Gamma\left(-\frac{i\Omega}{g}\right) \quad (2.81)$$

De (2.78)-(2.81), tenemos:

$$\alpha_{\Omega\omega}^* = -e^{\frac{\Omega\pi}{g}} \beta_{\Omega\omega}^* \quad (2.82)$$

Usando (2.82) en la propiedad de los coeficientes de Bogoliubov (2.61):

$$\delta(\Omega - \Omega') = \int_0^\infty d\omega (\alpha_{\Omega'\omega} \alpha_{\Omega\omega}^* - \beta_{\Omega'\omega} \beta_{\Omega\omega}^*) \quad (2.83)$$

$$= \int_0^\infty d\omega \left(e^{\frac{(\Omega' + \Omega)\pi}{g}} \beta_{\Omega'\omega} \beta_{\Omega\omega}^* - \beta_{\Omega'\omega} \beta_{\Omega\omega}^* \right) \quad (2.84)$$

Despejando:

$$\frac{1}{e^{\frac{(\Omega' + \Omega)\pi}{g}} - 1} \delta(\Omega - \Omega') = \int_0^\infty d\omega \beta_{\Omega'\omega} \beta_{\Omega\omega}^* \quad (2.85)$$

Haciendo $\Omega' = \Omega$, notamos, tal como se mencionó anteriormente, que la integral diverge debido a la integración sobre todo el espectro de energía ω en Minowski. No obstante, la cantidad que acompaña a $\delta(0)$:

$$\frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{g}} - 1} \quad (2.86)$$

Se interpreta como la densidad del valor esperado del número de partículas en la cuña derecha⁷. La cual es, precisamente, el valor esperado del número de partículas con energía Ω para la distribución de Bose-Einstein:

$$\frac{1}{e^{\frac{\Omega}{T}} - 1} \quad (2.87)$$

Por lo tanto, el observador en la cuña derecha de Rindler percibe el vacío de la geometría de fondo (Minkowski) como un colectivo canónico de partículas bosónicas con Spin = 0 (debido al campo escalar ϕ) con masa nula, cuya temperatura es proporcional a la aceleración de dicho sistema:

$$T = \frac{g}{2\pi} = \frac{\hbar g}{2\pi c \kappa_\beta} \quad (2.88)$$

Este resultado se denominada Efecto Unruh [19].

⁷Dicho resultado será comprobado en la subsección 2.2.5 mediante el uso del formalismo de la matriz de densidad aplicada a la cuña derecha

2.2. Á la Euclides

2.2.1. Integral de camino Euclidiana

La amplitud de transición debido al operador de evolución e^{-iHt} :

$$\langle \phi(x_f; t_f = t) | \phi(x_0; t_0 = 0) \rangle = \langle \phi_f | e^{-iHt} | \phi_0 \rangle \quad (2.89)$$

Se puede expresar mediante la integral de camino:

$$\langle \phi_f | e^{-iHt} | \phi_0 \rangle = \int_{\phi(t=0)=\phi_0}^{\phi(t)=\phi_f} D\phi e^{iI} \quad (2.90)$$

Donde los límites de integración corresponden a los estados inicial y final, e I es la acción de la teoría $I = \int dt dx \mathcal{L}$.

Si definimos los estados inicial y final sobre foliaciones espaciales ($t_0 = 0$ y $t_f = t$) con topología $\Sigma = S^1$. Al propagar el estado inicial en el tiempo, la topología del espacio-tiempo será:

$$R_t^1 \otimes \Sigma = R_t^1 \otimes S^1 \quad (2.91)$$

Por lo tanto, la amplitud (2.90) se representará de la siguiente forma:

$$\langle \phi_f | e^{-iHt} | \phi_0 \rangle \quad \langle \rangle \quad \begin{array}{c} |\phi_f\rangle \\ \text{---} \\ \text{Cylinder} \\ \text{---} \\ |\phi_0\rangle \end{array} \quad t \quad (2.92)$$

Por otro lado, la integral de camino también se puede desarrollar en signatura Euclidiana. Para ello se realiza la rotación de Wick (Apéndice C):

$$t_E = it \quad (2.93)$$

La propagación del estado inicial se dará en el tiempo Euclidiano:

$$\langle \phi_f | e^{-Ht_E} | \phi_0 \rangle \quad (2.94)$$

Introduciendo (2.93) en iI , para el campo escalar real ϕ , tenemos:

$$\begin{aligned} iI &= i \int dt dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)^2 - \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 - \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \\ &= - \int dt_E dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_E} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \end{aligned} \quad (2.95)$$

Definimos la acción Euclidiana:

$$I_E := \int dt_E dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_E} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \quad (2.96)$$

Notamos:

$$iI = -I_E = -H t_E \quad (2.97)$$

Donde:

$$H = \int dx \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t_E} \right)^2 + \frac{1}{2} (\nabla \phi)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2 \right] \quad (2.98)$$

$$t_E = \int dt_E \quad (2.99)$$

De esta forma, al realizar la rotación de Wick (2.93) sobre la amplitud (2.90), obtenemos (Revisar [20]):

$$\langle \phi_f | e^{-H t_E} | \phi_0 \rangle = \int_{\phi(t_E=0)=\phi_0}^{\phi(t_E)=\phi_f} D\phi e^{-I_E} \quad (2.100)$$

De igual manera, podemos definir los estados $|\phi\rangle$ con topología $\Sigma = S^1$ sobre las foliaciones $t_E = 0$ y t_E :

$$R_{t_E}^1 \otimes \Sigma = R_{t_E}^1 \otimes S^1 \quad (2.101)$$

Luego, la amplitud (2.100) se representará de la siguiente forma:

$$\langle \phi_f | e^{-H t_E} | \phi_0 \rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} |\phi_f\rangle \\ \text{Cylinder} \\ |\phi_0\rangle \end{array} \quad t_E \quad (2.102)$$

Por otro lado, al propagar el estado $|\psi\rangle$ desde $t_E = -T$ hasta $t_E = t = 0$:

$$|\psi(t=0)\rangle = e^{-HT} |\psi(t_E = -T)\rangle \quad (2.103)$$

Establecemos la integral de camino Euclidiana con el límite de integración superior indefinido:

$$|\psi(t=0)\rangle = e^{-HT} |\psi(t_E = -T)\rangle = \int_{\psi(t_E=-T)=\psi}^{\psi(t_E=0)} D\psi e^{-I_E} \quad (2.104)$$

De igual manera, si la foliación $t_E = 0$ posee la topología Σ , el estado (2.103) se representará de la siguiente forma:

$$|\psi(t=0)\rangle = e^{-HT} |\psi(t_E = -T)\rangle \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{c} \Sigma \\ \text{Cylinder} \\ |\psi(-T)\rangle \end{array} \quad t_E = T \quad (2.105)$$

De esta forma, al no establecer el límite superior de la integral de camino, definimos el estado $|\psi(t=0)\rangle$ sobre la foliación con topología Σ .

Evidentemente, la integral de camino Euclidiana preparará el estado $|\psi\rangle$ (desde $t_E = -T$ hasta $t = t_E = 0$) (2.103) para su evolución en el tiempo Lorentziano t (Minkowski), a partir de $t = t_E = 0$. Por ende, el estado $|\psi(t)\rangle$ será obtenido realizando la evolución temporal en dos etapas:

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt} [e^{-HT} |\psi(t_E = -T)\rangle] \quad (2.106)$$

Además, de:

$$|\phi(t_E = 0)\rangle = e^{-HT} |\phi(t_E = -T)\rangle \quad (2.114)$$

$$\sum_n \phi_n(t_E = 0) |n\rangle = \sum_n e^{-E_n T} \phi_n(t_E = -T) |n\rangle \quad (2.115)$$

Para $n = 0$:

$$\phi_0(t_E = 0) |0\rangle = e^{-E_0 T} \phi_0(t_E = -T) |0\rangle \quad (2.116)$$

Entonces, en (2.113):

$$\lim_{t_E \rightarrow -\infty} |\phi(t_E = 0)\rangle \approx \phi_0(t_E = 0) |0\rangle \quad (2.117)$$

Luego:

$$|0\rangle \propto \lim_{t_E \rightarrow -\infty} |\phi(t_E = 0)\rangle \quad (2.118)$$

$$\propto \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-HT} |\phi(t_E = -T)\rangle \quad (2.119)$$

Dado el operador de evolución temporal (Euclidiano) y el valor de t_E en el estado inicial ($t_E \rightarrow -\infty$), tendremos que $|0\rangle$ será definido en $t_E = t = 0$:

$$|0(t = 0)\rangle \propto \int_{\phi(t_E \rightarrow -\infty)=0}^{\phi(t_E=0)} D\phi e^{-I_E} \quad (2.120)$$

Donde, en el límite inferior hemos usado (2.118), tal que:

$$\phi(t_E \rightarrow -\infty) = 0 \quad (2.121)$$

2.2.3. Función de Partición

La función de partición $Z(\beta)$ se define:

$$Z(\beta) := \sum_n e^{-\beta E_n} = \sum_n \langle \phi_n | e^{-\beta H} | \phi_n \rangle \quad (2.122)$$

Donde β es la inversa de la temperatura: $\beta = T^{-1}$.

Notamos que, a diferencia de la integral de camino Euclidiana (2.90), en este caso el estado final será el mismo que el inicial. De esta forma, es evidente la periodicidad de los estado $|\phi_n\rangle$ en β :

$$t_E \sim t_E + \beta \rightarrow |\phi_n(t_E)\rangle = |\phi_n(t_E + \beta)\rangle \quad (2.123)$$

Por lo tanto, es fácil notar que la función de partición $Z(\beta)$, en términos de la integral de camino Euclidiana, será:

$$Z(\beta) = \sum_n \langle \phi_n | e^{-\beta H} | \phi_n \rangle = \oint_{\phi_n} D\phi e^{-I_E} \quad (2.124)$$

Donde:

$$\beta = \oint dt_E \quad (2.125)$$

Y se presentará:

$$Z(\beta) = \sum_n \langle \phi_n | e^{-\beta H} | \phi_n \rangle \quad <> \quad \begin{array}{c} |\phi_n\rangle \\ \text{---} \\ \text{Cylinder} \\ \text{---} \\ |\phi_n\rangle \end{array} \quad \beta \quad (2.126)$$

2.2.4. Singularidad cónica y temperatura asociada

Aplicando al rotación de Wick en la métrica de Rindler, obtenemos el elemento de línea de Rindler en signatura Euclidiana:

$$ds_E^2 = e^{2g\xi} (d\tau_E^2 + d\xi^2) \quad (2.127)$$

El cual, mediante el cambio de variable visto en el Apéndice C, es el elemento de línea para las coordenadas polares (θ, ρ) del plano Euclidiano:

$$ds_E^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \quad (2.128)$$

Donde, a fin de evitar la singularidad cónica en el origen del plano polar, debemos imponer la periodicidad en θ :

$$\theta \sim \theta + 2\pi \quad (2.129)$$

Dicha condición de suavidad hace manifiesta la periodicidad de τ_E :

$$\tau_E \sim \tau_E + \frac{2\pi}{g} \quad (2.130)$$

La cual es precisamente la cantidad β (inversa de la temperatura) que vimos en al subsección concerniente a la Función de Partición 2.2.3.

Por lo tanto, la condición de suavidad impuesta sobre el plano polar, fija el valor de la periodicidad β en el tiempo Euclidiano. La cual, establece el valor de la temperatura para el colectivo canónico de la teoría:

$$T = \beta^{-1} = \frac{g}{2\pi} \quad (2.131)$$

2.2.5. Matriz de densidad

La matriz de densidad pura (Apéndice D) para el estado de vacío en Minkowski será:

$$\rho_M := |0_M\rangle \langle 0_M| \quad (2.132)$$

Sabemos:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^D \otimes \mathcal{H}^I \quad (2.133)$$

Por lo tanto, la base del operador de campo en Minkowski, en términos de aquellos en las cuñas derecha e izquierda de Rindler será:

$$|\phi_M\rangle = |\phi_D\rangle \otimes \Theta |\phi_I\rangle \quad (2.134)$$

Donde Θ es el operador antiunitario (Apéndice E) *CPT*. Tal que:

- C : No tiene efecto alguno, ya que el campo es escalar.
- P : Dadas las transformaciones (1.62) (cuña derecha) y (1.67) (cuña izquierda), la acción del operador coloca ambas cuñas en concordancia espacial respecto de la coordenada x de Minkowski.
- T : El tiempo en la cuña izquierda evoluciona en dirección opuesta al de la derecha, el cual va acorde a Minkowski.

Luego, la matriz de densidad para la cuña derecha se obtiene tomando la traza del lado izquierdo en la matriz total de la teoría (2.132):

$$\rho_D = \text{tr}_I [\rho_M] \quad (2.135)$$

No obstante, sabiendo de antemano que la percepción del observador Rindler corresponde a un colectivo canónico a temperatura:

$$T = \beta^{-1} = \frac{g}{2\pi} \quad (2.136)$$

La matriz de densidad en la cuña derecha (análogo a la cuña izquierda) tendrá una forma conocida:

$$\rho_D := \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n e^{-\beta E_n} |n_D\rangle \langle n_D| = \frac{e^{-\frac{2\pi}{g} H^R}}{Z(\beta)} \quad (2.137)$$

Donde, H^R es el Hamiltoniano de Rindler en la cuña derecha con base $|n_D\rangle$ y autovalor E_n .

Por lo tanto, el valor esperado del número de partículas con energía Ω en la cuña derecha será:

$$\langle N_D \rangle = \text{tr}[N_D \rho_D] = \frac{1}{Z(\beta)} \sum_n \langle n_D | N_D e^{-\frac{2\pi}{g} H^R} | n_D \rangle \quad (2.138)$$

Sabiendo:

$$H^R |n_D\rangle = E_n |n_D\rangle = n\Omega |n_D\rangle \quad (2.139)$$

$$N_R |n_D\rangle = n |n_D\rangle \quad (2.140)$$

Tenemos:

$$\langle N_D \rangle = \frac{\sum_n n e^{-\frac{2\pi}{g} n\Omega}}{\sum_n e^{-\frac{2\pi}{g} n\Omega}} \quad (2.141)$$

Sumando sobre todo el espectro de energía, i.e., desde $n = 0$ a $n = \infty$.

$$\langle N_D \rangle = \frac{1}{e^{\frac{2\pi\Omega}{g}} - 1} \quad (2.142)$$

De esta forma, el valor esperado del número de partículas en la cuña derecha es exactamente aquel correspondiente a la distribución de Bose-Einstein obtenido en (2.86).

2.2.6. Thermofield Double State

Minkowski como producto tensorial de Rindler

De (2.134), el estado del operador de campo en Minkowski será expresado en términos de las bases del mismo en cada cuña:

$$|\phi_M\rangle = |\phi_D\rangle \otimes \Theta |\phi_I\rangle \quad (2.143)$$

Donde el operador antiunitario Θ (conjugación CPT) actúa sobre el estado de Rindler en la cuña izquierda a fin de que los estados del operador de campo en Rindler $\{|\phi_D\rangle, |\phi_I\rangle\}$ posean la misma paridad y dirección de propagación temporal (Lorentz).

De igual manera, para los autoestados del operador Hamiltoniano en Minkowski tenemos:

$$|n\rangle \propto |n_D\rangle \otimes \Theta |n_I\rangle \quad (2.144)$$

De esta forma, la amplitud:

$$\langle \phi_M | 0_M(t=0) \rangle \quad (2.145)$$

Será escrita en términos de los productos tensoriales (2.143) y (2.144).

Sección Euclídea en coordenadas polares

La métrica de Rindler en signatura Euclidiana se puede escribir como el elemento de línea del plano polar (θ, ρ) (Apéndice C):

$$ds_E^2 = d\rho^2 + \rho^2 d\theta^2 \quad (2.146)$$

Luego, la transformación de coordenadas entre Minkowski y Rindler, ambos en signatura Euclidiana, será un simple cambio a coordenadas polares (θ, ρ) :

$$t_E = \rho \sin(\theta) \quad (2.147)$$

$$x = \rho \cos(\theta) \quad (2.148)$$

Donde, hemos abolido los signos \pm presentes en las transformaciones Lorentzianas (1.62)-(1.67) para las cuñas derecha e izquierda, definidas en las regiones $|t| < \pm x$; ya que, las transformaciones en signatura Euclidiana (2.147)-(2.148) se definen en todo el espacio (t_E, x) .

Asimismo, el vector Killing asociado al elemento de línea (2.146) será el generador de rotaciones en el plano (t_E, x) :

$$\partial_\theta = x\partial_{t_E} - t\partial_x \quad (2.149)$$

Tal que, al realizar el calculo para determinar la dirección de propagación de θ respecto de t_E , obtenemos que esta se dará en sentido antihorario. Por ende, las discordancias en la dirección temporal y paridad, vistas para la sección Lorentziana de las cuñas derecha e izquierda, serán interpretadas, en su contraparte Euclidiana, como una diferencia angular.

Finalmente, mientras el operador Hamiltoniano H genera traslaciones en t_E , en coordenadas polares ($H = H_\theta$) dicho operador generará traslaciones en θ , i.e., rotaciones de ángulo θ en el plano (t_E, x) . Entonces:

$$H_\theta = H^R \quad (2.150)$$

Amplitud de transición

La amplitud de transición para el estado del operador de campo ϕ y el vacío $|0\rangle$, ambos definidos en Minkowski, para $t = 0$, será:

$$\langle \phi_M | 0_M(t=0) \rangle \propto \lim_{T \rightarrow \infty} \langle \phi_M | e^{-HT} | \phi(t_E = -T) \rangle \quad (2.151)$$

$$\propto \int_{\phi(t_E \rightarrow -\infty)=0}^{\phi(t_E=0)=\phi_M} D\phi e^{-I_E} \quad (2.152)$$

Tal que, en coordenadas polares (2.147)-(2.148), los límites de integración $t_E = -\infty$ y $t_E = 0$, corresponderán a $\theta = -\pi$ y $\theta = 0$. Luego:

$$\phi(\theta = -\pi) = \phi_I \quad (2.153)$$

$$\phi(\theta = 0) = \phi_D \quad (2.154)$$

De esta manera, el Hamiltoniano H^R propagará el estado $|\phi_I\rangle$ hacia $|\phi_D\rangle$, en $t = 0$, a través de la sección Euclídea, mediante una rotación antihoraria de π (Figura 2.1).

Por lo tanto:

$$\langle \phi_M | 0_M(t=0) \rangle \propto \int_{\phi(\theta=-\pi)=\phi_I}^{\phi(\theta=0)=\phi_D} D\phi e^{-I_E} \quad (2.155)$$

$$\propto \langle \phi_D | e^{-\pi H^R} | \phi_I \rangle \quad (2.156)$$

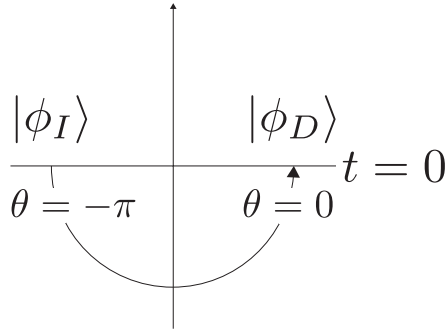


Figura 2.1: Propagación de los estados del operador de campo en Rindler.

Acción del operador $e^{-\pi H^R}$ sobre $|n_I\rangle$

Para poder determinar la amplitud (2.156), primero procederemos a mostrar la validez de la siguiente definición:

$$e^{-\pi H^R} |n_I\rangle := e^{-\pi E_n} |n_D\rangle \quad (2.157)$$

Sabemos:

$$|\phi'_D\rangle = e^{-\pi H^R} |\phi_I\rangle \quad (2.158)$$

Insertando los operadores unidad para las bases del operador Hamiltoniano correspondiente a cada cuña en (2.158):

$$\sum_n |n_D\rangle \langle n_D| \phi'_D \rangle = \sum_n e^{-\pi H^R} |n_I\rangle \langle n_I| \phi_I \rangle \quad (2.159)$$

$$\sum_n \phi_n'^D |n_D\rangle = \sum_n e^{-\pi H^R} \phi_n^I |n_I\rangle \quad (2.160)$$

Entonces, usando (2.157), (2.153) y (2.154) en (2.160), tenemos la siguiente expresión:

$$\sum_n \phi_n'(\theta=0)_n |n_D\rangle = \sum_n e^{-\pi E_n} \phi_n(\theta=-\pi) |n_D\rangle \quad (2.161)$$

La cual es consistente con aquella encontrada para la propagación en t_E (2.115):

$$\sum_n \phi_n(t_E=0) |n\rangle = \sum_n e^{-T E_n} \phi_n(t_E=-T) |n\rangle \quad (2.162)$$

Thermofield Double State

Insertamos el operador unidad:

$$1 = \sum_n |n_I\rangle \langle n_I| \quad (2.163)$$

En (2.156):

$$\langle \phi_M | 0_M(t=0) \rangle \propto \langle \phi_D | e^{-\pi H^R} | \phi_I \rangle \quad (2.164)$$

$$\propto \langle \phi_D | e^{-\pi H^R} \sum_n |n_I\rangle \langle n_I| \phi_I \rangle \quad (2.165)$$

Usando (2.157) y lo obtenido en el Apéndice E:

$$\langle \phi_M | 0_M(t=0) \rangle \propto \sum_n e^{-\pi E_n} \langle \phi_D | n_D \rangle [\langle \phi_I | \Theta^\dagger] [\Theta | n_I \rangle] \quad (2.166)$$

De (2.143) y (2.144), tenemos:

$$\langle \phi_M | 0_M(t=0) \rangle \propto \langle \phi_D | \otimes \langle \phi_I | \Theta^\dagger \left[\sum_n e^{-\pi E_n} |n_D\rangle \otimes \Theta |n_I\rangle \right] \quad (2.167)$$

Sabemos que $|0\rangle$ es un estado puro, i.e., $\langle 0|0\rangle=1$. Por lo tanto, a partir de dicha condición de normalización, tenemos:

$$|0_M(t=0)\rangle = \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta}{2}E_n}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_D\rangle \otimes \Theta |n_I\rangle \quad (2.168)$$

Donde $\beta = 2\pi$.

El estado (2.168) es denominado Thermofield Double State *TFD* (Revisar [2][3][4]).

Consistencia del *TFD*

La matriz de densidad para la cuña derecha se obtendrá de (2.135):

$$\rho_D = \sum_n \langle n_I | \Theta^\dagger \left[\sum_m \sum_{m'} \frac{e^{-\frac{\beta}{2}(E_m + E_{m'})}}{Z(\beta)} |m_D, m_I\rangle \langle m_D, m_I| \right] \Theta |n_I\rangle \quad (2.169)$$

Donde:

$$|m_D, m_I\rangle = |m_D\rangle \otimes \Theta |m_I\rangle \quad (2.170)$$

$$\langle m_D, m_I| = \langle m'_D| \otimes \langle m'_I| \Theta^\dagger \quad (2.171)$$

De esta manera, ρ_D será:

$$\rho_D = \sum_n \frac{e^{-\beta E_n}}{Z(\beta)} |n_D\rangle \langle n_D| \quad (2.172)$$

Notamos que ρ_D es una matriz de densidad mixta ($\rho_D^2 \neq \rho_D$), elaborada a partir de los estados puros $|n_D\rangle$ en la cuña derecha (lo mismo para la cuña izquierda).

Además, es importante mencionar que las teorías en las cuñas son invariantes conforme (CFT) a temperatura:

$$T = \beta^{-1} = \frac{1}{2\pi} \quad (2.173)$$

Por lo tanto, el vacío de Minkowski $|0_M(t=0)\rangle$ dado por el Thermofield Double State (2.168) es un estado entrelazado (ρ_D y ρ_I son mixtas) de las CFTs $\{|n_D\rangle, |n_I\rangle\}$ a temperatura β^{-1} .

Donde, la temperatura del colectivo canónico descrito por ρ_D (2.173) es aquella asociada al defecto cónico del plano polar (θ, ρ) :

$$\theta \sim \theta + 2\pi \rightarrow T = \frac{1}{2\pi} \quad (2.174)$$

No obstante, la percepción del observador Rindler es obtenida a partir de la relación entre τ_E y θ (Apéndice C):

$$gd\tau_E = d\theta \quad (2.175)$$

Por lo tanto, la temperatura percibida por el observador Rindler será:

$$T = \frac{g}{2\pi} \quad (2.176)$$

En concordancia con lo obtenido en la subsección 2.1.5.

2.3. Observaciones Finales

Mientras el observador inercial percibe el vacío de la teoría sobre la geometría de fondo como el estado de cero partículas; el no inercial, percibe un colectivo canónico de partículas de Spin 0 y temperatura:

$$T = \frac{g}{2\pi} \quad (2.177)$$

Además, a partir de la rotación de Wick, las relaciones termodinámicas surgen al imponer periodicidad en la continuación Euclídea de la coordenada temporal. De esta manera, abolimos la singularidad cónica en dicha estructura espacial.

Finalmente, el estado de vacío de la teoría, $|0_M\rangle$, es un estado entrelazado de las bases del operador Hamiltoniano en cada cuña. Dicho estado, denominado Thermofield Double State, es de suma importancia; ya que, como veremos en el siguiente capítulo, surgirá de forma natural para la geometría global de *BTZ* mediante aplicación de la correspondencia *AdS/CFT*.

Capítulo 3

Dualidad Agujero-de-Gusano/Entrelazamiento-cuántico

En este capítulo desarrollaremos el detalle de la gravedad en $(2+1)$ con curvatura constante negativa. Además, mediante identificaciones en la topología lograremos obtener la solución de agujero negro denominada *BTZ*. Asimismo, a partir de lo visto en el capítulo anterior, y la correspondencia *AdS/CFT*, hallaremos el dual holográfico para el agujero negro eterno.

3.1. ¿Gravedad o no gravedad en 2+1?

El tensor de Riemann para un espacio-tiempo de métrica $g_{\mu\nu}$ y dimensión $(d+1) \geq 3$ puede descomponerse de la siguiente manera:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} + \frac{1}{d-1}(g_{\mu\rho}R_{\nu\sigma} + g_{\nu\sigma}R_{\mu\rho} - g_{\nu\rho}R_{\mu\sigma} - g_{\mu\sigma}R_{\nu\rho}) - \frac{1}{d(d-1)}R(g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}) \quad (3.1)$$

Donde $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Weyl. Tal que, para el vacío $T_{\mu\nu} = 0 \rightarrow R_{\mu\nu} = R = 0$:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (3.2)$$

El tensor $C_{\mu\nu\rho\sigma}$ será el portador de los grados de libertad concernientes a las perturbaciones (ondas gravitacionales) que se propagan en el vacío.

Además, posee las mismas simetrías del tensor de Riemann:

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\rho\sigma\mu\nu} \quad (3.3)$$

$$C_{\mu\nu\rho\sigma} = -C_{\nu\mu\rho\sigma} \quad (3.4)$$

$$= -C_{\mu\nu\sigma\rho} \quad (3.5)$$

$$C_{\mu[\nu\rho\sigma]} = 0 \quad (3.6)$$

Y tiene traza nula:

$$C_{\rho\mu\sigma}^{\mu} = 0 \quad (3.7)$$

3.1.1. $2 + 1$ con $R_{\mu\nu} = 0$

Para el vacío con constante cosmológica nula:

$$R_{\mu\nu} = 0 \quad (3.8)$$

El tensor de Riemann (3.1) en $(2 + 1)$ será:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} \quad (3.9)$$

No obstante, en la dimensión mencionada, $(2 + 1)$, al menos dos de los índices del tensor de Weyl serán iguales. En caso de tener más de dos índices iguales, de las simetrías (3.3)-(3.6), dicho tensor será nulo:

$$C_{aaab} = -C_{aaba} = C_{abaa} = -C_{baaa} = 0 \quad (3.10)$$

$$C_{aaaa} = 0 \quad (3.11)$$

Por otro lado, para 2 índices iguales, tenemos los siguientes casos:

$$\{C_{aabc}, C_{aacb}, C_{bcaa}, C_{cbaa}, C_{abac}, C_{acab}\} \quad (3.12)$$

De las simetrías (3.3)-(3.7), el único elemento posiblemente distinto de cero es:

$$C_{abac} = C_{acab} \quad (3.13)$$

Además, de (3.7):

$$C_{bac}^a = g^{aa} C_{abac} = 0 \quad (3.14)$$

Tenemos:

$$g^{00} C_{0b0c} + g^{11} C_{1b1c} + g^{22} C_{2b2c} = 0 \quad (3.15)$$

Para $b \neq c$, de las simetrías (3.3)-(3.7) y sabiendo que los elementos de la métrica $\{g^{00}, g^{11}, g^{22}\}$ son distintos de cero, todos los términos en C_{abac} serán nulos.

Por otro lado, para $b = c$, tenemos:

$$g^{11} C_{1010} = -g^{22} C_{2020} \quad (3.16)$$

$$g^{22} C_{2121} = -g^{00} C_{0101} \quad (3.17)$$

$$g^{00} C_{0202} = -g^{11} C_{1212} \quad (3.18)$$

No obstante, de (3.3)-(3.7), tenemos las siguientes igualdades:

$$g^{11} C_{1010} = -g^{22} C_{2020} = \frac{g^{11} g^{22}}{g^{00}} C_{1212} = -g^{11} C_{1010} \quad (3.19)$$

Finalmente, en $(2+1)$ el tensor de Weyl es nulo, y por consiguiente, también el tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad (3.20)$$

Por lo tanto, no hay grados de libertad gravitacionales y la curvatura es nula.

3.1.2. $2 + 1$ con $R_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu}$

De la subsección anterior $C_{\mu\nu\rho\sigma} = 0$, entonces (3.1) será:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{6}[g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}] \quad (3.21)$$

Por lo tanto, en $(2 + 1)$ no hay propagación de grados de libertad concernientes a perturbaciones en el vacío, y el tensor de Riemann corresponde a aquel dado para un espacio-tiempo de máxima simetría¹:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{(d+1)(d)}[g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}] \quad (3.22)$$

¹Aquel que posee la máxima cantidad de vectores killing. Para un espacio-tiempo de $(d + 1)$ -dimensiones:

$$\frac{1}{2}(d+1)(d+2)$$

Además, un espacio-tiempo embebido será de máxima simetría si posee todas aquellas concernientes al espacio-tiempo base. Por ejemplo: S^2 respecto de \mathbb{R}^3 .

3.2. Agujero negro de *BTZ*

3.2.1. Espacio-tiempo *AdS*

El espacio-tiempo Anti-de Sitter (*AdS*), en $(d + 1)$ dimensiones, es una solución de la ecuación de Einstein-Hilbert para el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) con constante cosmológica negativa ($\Lambda < 0$):

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = -\Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.23)$$

Para ver ello, primero construiremos *AdS* a partir de embeber una hiper-superficie en un espacio-tiempo plano con una componente temporal adicional:

$$ds^2 = -(dx^0)^2 - (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + \dots + (dx^{d+1})^2 \quad (3.24)$$

*AdS*_(*d*+1) se define sobre la hiper-superficie a *L* constante:

$$-(x^0)^2 - (x^1)^2 + (x^2)^2 + \dots + (x^{d+1})^2 = -L^2 \quad (3.25)$$

Evidentemente, este es un espacio-tiempo homogéneo, i.e., dada su construcción, resulta invariante bajo el mismo grupo de simetría del espacio-tiempo donde fue embebido: $SO(2, d)$.

La métrica de *AdS* se obtiene mediante el siguiente mapeo:

$$x^0 = L \cosh \rho \cos \tilde{t} \quad (3.26)$$

$$x^1 = L \cosh \rho \sin \tilde{t} \quad (3.27)$$

$$x^i = L \sinh \rho \omega^i \quad (3.28)$$

Donde:

$$1 = \omega_2^2 + \omega_3^2 + \dots + \omega_{d+1}^2 \quad (3.29)$$

De esta forma, el elemento de línea será:

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\Omega_{d-1}^2) \quad (3.30)$$

De (3.26) y (3.27) notamos que la coordenada \tilde{t} define bucles temporales debido a su periodicidad de 2π . La manera adecuada de solucionar esto es recurriendo al recubrimiento universal, i.e., ‘desenrollando’ el espacio-tiempo; tal que, la coordenada temporal, en lugar de ir de $-\pi$ a π , irá de $-\infty$ a $+\infty$.

Además, haciendo los cambios de variables:

$$r = L \sinh \rho \quad (3.31)$$

$$t = \tilde{t}L \quad (3.32)$$

Tenemos la siguiente forma para la métrica del espacio-tiempo AdS :

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega_{d-1}^2 \quad (3.33)$$

En $(2+1)$, el elemento de línea de AdS será:

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right) dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.34)$$

Además, debido a que dicho espacio-tiempo es homogéneo, su tensor de curvatura será aquel de máxima simetría (3.22). Por lo tanto, el tensor de Riemann para la métrica² (3.34) será:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{R}{6} [g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}] \quad (3.35)$$

Para determinar el valor del escalar de Ricci, igualamos los tensores de Ricci obtenidos a partir de la métrica de AdS_3 (3.34) y la ecuación de Einstein-Hilbert (3.23), respectivamente:

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{L} g_{\mu\nu} = 2\Lambda g_{\mu\nu} \quad (3.36)$$

Encontramos:

$$\Lambda = -\frac{1}{L^2} \quad (3.37)$$

$$R = -\frac{6}{L^2} \quad (3.38)$$

Por ende, el tensor de Riemann y el escalar de Kretschmann serán:

$$R_{\mu\nu\rho\sigma} = -\frac{1}{L^2} [g_{\mu\rho}g_{\nu\sigma} - g_{\nu\rho}g_{\mu\sigma}] \quad (3.39)$$

$$K = \frac{12}{L^4} \quad (3.40)$$

Finalmente, tal como se mencionó al principio de esta subsección, el espacio-tiempo

²Para $AdS_{(d+1)}$, este resultado y los siguientes se obtendrán fácilmente a partir de la ecuación de Einstein-Hilbert (3.23), donde se hará evidente la dependencia de la dimensión espacial d .

AdS en $(2 + 1)$, descrito por la métrica (3.34), es una solución de la ecuación de Einstein-Hilbert (3.23) en el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$) con constante cosmológica negativa (3.37). Además, dicha métrica describe un espacio-tiempo con curvatura constante negativa (3.38).

3.2.2. De *AdS* a *BTZ*

Tal como se ha visto en la subsección anterior, el espacio-tiempo *AdS*₃ es invariante bajo el grupo $SO(2, 2)$ (grupo de simetría del espacio-tiempo base, plano, donde se ha embebido la hiper-superficie sobre la cual definimos *AdS*₃). Por lo tanto, los vectores de Killing asociados a dicho grupo serán:

$$J_{\mu\nu} = x_\nu \partial_\mu - x_\mu \partial_\nu \quad (3.41)$$

Tal que, los índices $\{\mu, \nu\}$ están asociados a las coordenadas $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ del espacio-tiempo base.

Podemos construir un nuevo espacio-tiempo a partir de variaciones en la topología de *AdS*₃. Para ello, usaremos el siguiente vector Killing:

$$\xi = \frac{r_+}{L} J_{12} - \frac{r_-}{L} J_{03} \quad (3.42)$$

Dado por la combinación lineal de:

$$J_{12} = x^2 \partial_1 - x^1 \partial_2 \quad (3.43)$$

$$J_{03} = x^3 \partial_0 - x^0 \partial_3 \quad (3.44)$$

Obtenidos para el espacio-tiempo base (3.41). De esta manera, la forma del vector Killing en componentes contravariantes será:

$$\xi^\mu = \left(-x^3 \frac{r_-}{L}, x^2 \frac{r_+}{L}, x^1 \frac{r_+}{L}, -x^0 \frac{r_-}{L} \right) \quad (3.45)$$

La construcción mencionada se realizará mediante la identificación de puntos en el espacio-tiempo *AdS*₃ debido a la aplicación del vector Killing (3.42). De esta manera, tenemos:

$$x^\mu \sim e^{n\xi} x^\mu \quad (3.46)$$

Donde n , es el valor del parámetro asociado al vector Killing ξ , el cual define la periodicidad mostrada arriba.

Además, es necesario imponer que dicho vector Killing sea tipo-espacio:

$$\xi^\mu \xi_\mu = \frac{r_+^2}{L^2} ((x^1)^2 - (x^2)^2) + \frac{r_-^2}{L^2} ((x^0)^2 - (x^3)^2) > 0 \quad (3.47)$$

De esta forma evitamos la existencia de bucles temporales. Luego, de (3.25) en la norma del vector Killing, tenemos:

$$\xi^\mu \xi_\mu = \frac{(r_+^2 - r_-^2)}{L^2} ((x^1)^2 - (x^2)^2) + r_-^2 > 0 \quad (3.48)$$

Del cual, se obtiene la siguiente desigualdad:

$$-\frac{r_-^2 L^2}{r_+^2 - r_-^2} < (x^1)^2 - (x^2)^2 < \infty \quad (3.49)$$

La cual, nos permite clasificar la región (3.49) en tres subregiones:

Región I : $L^2 < (x^1)^2 - (x^2)^2$

Desarrollando:

$$L^2 < (x^1)^2 - (x^2)^2 \quad (3.50)$$

$$L^2 \frac{(r_+^2 - r_-^2)}{L^2} + r_-^2 < \frac{(r_+^2 - r_-^2)}{L^2} ((x^1)^2 - (x^2)^2) + r_-^2 \quad (3.51)$$

Tenemos:

$$r_+^2 < \xi^\mu \xi_\mu < \infty \quad (3.52)$$

En esta región insertamos el siguiente mapeo de $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ a $\{t, r, \phi\}$ para $r > r_+$:

$$x^0 = \sqrt{A_+(r)} \sinh \phi_+(t, \phi) \quad (3.53)$$

$$x^1 = \sqrt{A_-(r)} \cosh \phi_-(t, \phi) \quad (3.54)$$

$$x^2 = \sqrt{A_-(r)} \sinh \phi_-(t, \phi) \quad (3.55)$$

$$x^3 = \sqrt{A_+(r)} \cosh \phi_+(t, \phi) \quad (3.56)$$

Donde, la base vectorial de ϕ :

$$\partial_\phi = \frac{\partial x^\mu}{\partial \phi} \partial_\mu \quad (3.57)$$

En comparación con (3.45), será:

$$\partial_\phi = \xi^\mu \quad (3.58)$$

Región II : $0 < (x^1)^2 - (x^2)^2 < L^2$

Procediendo igual que en la región I, tenemos:

$$r_-^2 < \xi^\mu \xi_\mu < r_+^2 \quad (3.59)$$

En esta región insertamos el siguiente mapeo de $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ a $\{t, r, \phi\}$ para $r_+ > r > r_-$:

$$x^0 = -\sqrt{-A_+(r)} \sinh \phi_+(t, \phi) \quad (3.60)$$

$$x^1 = \sqrt{A_-(r)} \cosh \phi_-(t, \phi) \quad (3.61)$$

$$x^2 = \sqrt{A_-(r)} \sinh \phi_-(t, \phi) \quad (3.62)$$

$$x^3 = -\sqrt{-A_+(r)} \cosh \phi_+(t, \phi) \quad (3.63)$$

Donde, obtenemos:

$$\partial_\phi = \xi^\mu \quad (3.64)$$

Región III : $-\frac{r_-^2 L^2}{r_+^2 - r_-^2} < (x^1)^2 - (x^2)^2 < 0$

De forma análoga, tenemos:

$$0 < \xi^\mu \xi_\mu < r_-^2 \quad (3.65)$$

En esta región insertamos el siguiente mapeo de $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ a $\{t, r, \phi\}$ para $r_- > r > 0$:

$$x^0 = -\sqrt{-A_+(r)} \sinh \phi_+(t, \phi) \quad (3.66)$$

$$x^1 = \sqrt{-A_-(r)} \cosh \phi_-(t, \phi) \quad (3.67)$$

$$x^2 = \sqrt{-A_-(r)} \sinh \phi_-(t, \phi) \quad (3.68)$$

$$x^3 = -\sqrt{-A_+(r)} \cosh \phi_+(t, \phi) \quad (3.69)$$

Igualmente, se obtiene:

$$\partial_\phi = \xi^\mu \quad (3.70)$$

En las tres regiones mencionadas tenemos los mapeos de $\{x^0, x^1, x^2, x^3\}$ a $\{t, r, \phi\}$ bajo diferentes condiciones en la coordenada radial r . Donde:

$$A_+(r) = L^2 \left(\frac{r^2 - r_+^2}{r_+^2 - r_-^2} \right) \quad (3.71)$$

$$A_-(r) = L^2 \left(\frac{r^2 - r_-^2}{r_+^2 - r_-^2} \right) \quad (3.72)$$

$$\phi_+(t, \phi) = \frac{1}{L} \left(\frac{tr_+}{L} - \phi r_- \right) \quad (3.73)$$

$$\phi_-(t, \phi) = \frac{1}{L} \left(-\frac{tr_-}{L} + \phi r_+ \right) \quad (3.74)$$

De esta manera, en las tres regiones el elemento de línea, determinado por (3.24), será:

$$ds^2 = -N(r)^2 dt^2 + N(r)^{-2} dr^2 + r^2 \left(d\phi - \frac{r_+ r_-}{L r^2} dt \right)^2 \quad (3.75)$$

Donde:

$$N(r)^2 = \left[\frac{(r^2 - r_+^2)(r^2 - r_-^2)}{L^2 r^2} \right] \quad (3.76)$$

$$0 < r < \infty \quad (3.77)$$

$$-\infty < t < \infty \quad (3.78)$$

$$-\infty < \phi < \infty \quad (3.79)$$

Evidentemente, para los valores de r dados por r_+ y r_- , la función $N(r)^2$ será nula:

$$N(r_+)^2 = N(r_-)^2 = 0 \quad (3.80)$$

Por otro lado, de (3.75) notamos que ∂_ϕ es un vector Killing asociado a dicha métrica.

Además, sabemos:

$$\partial_\phi = \xi^\mu \quad (3.81)$$

Por consiguiente, la siguiente identificación en la coordenada ϕ :

$$\phi \sim \phi + 2\pi \quad (3.82)$$

Será, precisamente, aquella mencionada en (3.46) para el vector de Killing ξ , donde $n = 2\pi$:

$$x^\mu \sim e^{2\pi\xi} x^\mu \quad (3.83)$$

Por lo tanto, el elemento de línea (3.75), construido a partir de la identificación (3.83) en el espacio-tiempo AdS_3 , será aquel correspondiente al agujero negro rotante, con momento angular J :

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + \frac{J^2}{4r^2} - M\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + \frac{J^2}{4r^2} - M\right)^{-1}dr^2 + r^2\left(d\phi - \frac{J}{2r^2}dt\right)^2 \quad (3.84)$$

Donde:

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{L^2} \quad (3.85)$$

$$J = \frac{2r_+r_-}{L} \quad (3.86)$$

$$r_\pm = L \left[\frac{M}{2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \left(\frac{J}{ML} \right)^2} \right) \right]^{\frac{1}{2}} \quad (3.87)$$

Dicho elemento de línea es denominado *BTZ* [5][6], el cual es solución de la ecuación de Einstein-Hilbert con constante cosmológica negativa.

Para el propósito de este trabajo consideraremos el elemento de línea (3.84) con $J = 0$:

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (3.88)$$

El cual tiene horizonte de eventos en $r_+ = L\sqrt{M}$.

Además, como se mencionó anteriormente, es solución de la ecuación de Einstein (3.23); tal que, al igual que en AdS_3 , la métrica (3.88) define un espacio-tiempo con:

$$\Lambda = -\frac{1}{L^2} \quad (3.89)$$

$$R_{\mu\nu} = -\frac{2}{L}g_{\mu\nu} \rightarrow R = -\frac{6}{L} \quad (3.90)$$

$$K = \frac{12}{L^4} \quad (3.91)$$

Evidentemente, dada su construcción, BTZ es localmente AdS_3 , i.e., un espacio-tiempo de curvatura constante negativa; Por ende, en $r = 0$, de la forma del escalar de Kretschmann (3.91), no habrá singularidad.

Además, sabemos que en $(2+1)$ no existe propagación de grados de libertad debido a perturbaciones gravitacionales (tensor de Weyl nulo). No obstante, como veremos, la métrica BTZ posee termodinámica.

3.2.3. Límite cerca del horizonte

Tomando el límite cerca del horizonte:

$$r \rightarrow r(\epsilon) = L\sqrt{M}(1 + \epsilon^2) \quad (3.92)$$

Con $\epsilon^2 \ll 1$.

Luego:

$$r(\epsilon)^2 \approx L^2M + 2L^2M\epsilon^2 \quad (3.93)$$

El elemento de línea (3.88), será:

$$ds^2 \approx -2M\epsilon^2 dt^2 + 2L^2 d\epsilon^2 + r(\epsilon)^2 d\phi^2 \quad (3.94)$$

Haciendo:

$$\rho = \sqrt{2}L\epsilon \quad (3.95)$$

$$\omega = \frac{t\sqrt{M}}{L} \quad (3.96)$$

Y tomando un valor arbitrario del ángulo polar $\phi = \phi_0$ para la observación cerca del horizonte, tendremos:

$$ds^2 \approx -\rho^2 d\omega^2 + d\rho^2 \quad (3.97)$$

La cual, bajo el cambio de coordenadas:

$$T = \rho \sinh \omega \quad (3.98)$$

$$X = \rho \cosh \omega \quad (3.99)$$

Toma la forma final de métrica plana:

$$ds^2 \approx -dT^2 + dX^2 \quad (3.100)$$

Lo cual resulta lógico, sabiendo que BTZ es localmente AdS_3 , el cual a su vez es conforme a Minkowski (Apéndice F). De esta manera, se hace evidente que la región cercana al horizonte es suave y, por lo tanto, no habrá singularidad alguna en dicha región.

3.2.4. Temperatura de Hawking

Usando la rotación de Wick (Apéndice C):

$$\theta = i\omega \quad (3.101)$$

Sobre la métrica (3.97), obtenemos:

$$ds^2 \approx \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \quad (3.102)$$

Imponiendo la periodicidad en θ , de forma tal que el plano polar (θ, ρ) no posea singularidad cónica en el origen:

$$\theta \sim \theta + 2\pi \quad (3.103)$$

Encontramos el valor de la periodicidad β para el tiempo en signatura Euclidiana $t_E = it$ asociado a la métrica (3.88). De esta forma, comparando t_E (de (3.96)) y θ , tenemos:

$$\frac{t_E \sqrt{M}}{L} = \theta \rightarrow \beta = \frac{2\pi L}{\sqrt{M}} \quad (3.104)$$

Por lo tanto, la temperatura de Hawking β^{-1} para el agujero negro descrito por la métrica (3.88), será:

$$T_H = \frac{\sqrt{M}}{2\pi L} \quad (3.105)$$

La cual, obviamente, concuerda con la expresión conocida para la temperatura de Hawking:

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.106)$$

Donde, la gravedad superficial κ , para la métrica (3.88), es:

$$\kappa = \frac{r_+}{L^2} \quad (3.107)$$

3.2.5. Integral de camino gravitacional

Tal como hemos visto en el capítulo anterior, la función de partición se define como la integral de camino Euclidiana, en la cual, el campo de la teoría tiene periodicidad en el tiempo Euclidiano t_E , dado por:

$$t_E \sim t_E + \beta \quad (3.108)$$

Por lo tanto, la función de partición $Z(\beta)$ asociada a las relaciones termodinámicas de los agujeros negros, se definirá como la integral de camino gravitacional, en signatura Euclidiana, donde el campo de la teoría, la variedad Euclídea $g_{\mu\nu}$, posea la periodicidad descrita en (3.108).

De esta forma, tenemos:

$$Z(\beta) = \int D_g e^{-S_E} \quad (3.109)$$

Donde, a fin de la aplicación de la correspondencia AdS/CFT , usaremos la aproximación semiclásica de punto de silla (saddle-point) al rededor de la solución clásica para la acción Euclídea [20]:

$$Z(\beta) \approx e^{-I_E} \quad (3.110)$$

Donde, I_E es la acción Euclídea clásica [21][22]:

$$I_E = -\frac{1}{16\pi G} \int_M d^3x \sqrt{g} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^2x \sqrt{h} K - \frac{1}{8\pi G} \int_{\partial M} d^2x \sqrt{h} K_0 \quad (3.111)$$

El primer término es la acción de Einstein-Hilbert, el segundo, el término de borde necesario para que el principio de acción permanezca bien definido, y el último, el contra-término necesario para eliminar divergencias en el borde $r \rightarrow \infty$, para que, I_E sea finita, a fin de obtener las siguientes variables termodinámicas:

$$S = (\beta \partial_\beta - 1) I_E \quad (3.112)$$

$$E = \partial_\beta I_E \quad (3.113)$$

Por lo tanto, calcularemos cada término de la acción Euclídea I_E (3.111) para *BTZ*, con métrica en dicha signatura:

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{L^2} - M \right) dt_E^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} - M \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.114)$$

Donde $t_E \sim t_E + \beta$.

Einstein-Hilbert

Sabiendo:

$$R = 6\Lambda \quad (3.115)$$

$$\lambda = -\frac{1}{L^2} \quad (3.116)$$

$$\sqrt{g} = r \quad (3.117)$$

Tenemos:

$$I_{E-H} = \frac{1}{4\pi GL^2} \int_0^\beta dt_E \int_0^{2\pi} d\phi \int_{r_+}^{r_0} r dr \quad (3.118)$$

$$= \frac{\beta}{4GL^2} (r_0^2 - r_+^2) \quad (3.119)$$

Donde la integración en r se realizó desde el horizonte r_+ hasta el borde $r = r_0$; debido a que, para el elemento de línea de *BTZ* en signatura Euclidiana (3.114) se tiene la periodicidad de t_E en β . Además, para valores arbitrarios de r , la longitud propia de β dependerá de $g_{t_E t_E}$:

$$\beta = \beta(r) = \int \sqrt{\frac{r^2}{L^2} - M} dt_E \quad (3.120)$$

Tal que, para el plano (t_E, r) , el origen queda determinado por el valor de r que hace $\beta(r) = 0$. Evidentemente, dicho valor será $r = r_+$.

Por lo tanto, para la acción en signatura Euclidiana:

$$r_+ < r < \infty \quad (3.121)$$

Término de borde

La traza de la métrica en el borde $r = r_0$, en signatura Euclidiana, será:

$$\sqrt{h} = r_0 \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M} \quad (3.122)$$

Por otro lado, el vector unitario normal a la hipersuperficie:

$$S = r - r_0 = 0 \quad (3.123)$$

Será:

$$n^\nu = \frac{g^{\mu\nu} \partial_\mu S}{\sqrt{g^{\mu\nu} \partial_\mu S \partial_\nu S}} \quad (3.124)$$

$$= \frac{\delta_r^\nu g^{rr} \partial_r S}{\sqrt{g^{rr} \partial_r S \partial_r S}} \quad (3.125)$$

$$= \frac{\delta_r^\nu}{\sqrt{g_{rr}}} \quad (3.126)$$

Tenemos:

$$n^\nu = \delta_r^\nu \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M} \quad (3.127)$$

Con lo cual ya estamos listos para calcular la traza del tensor de curvatura extrínseca $K^{\mu\nu} = \nabla^{(\mu} n^{\nu)}$:

$$K = g_{\mu\nu} K^{\mu\nu} = \nabla_\mu n^\mu \quad (3.128)$$

Luego:

$$K = \Gamma_{rtE}^{tE} n^r + \partial_r n^r + \Gamma_{rr}^r n^r + \Gamma_{r\phi}^\phi n^r \quad (3.129)$$

Tenemos:

$$K = \frac{r_0}{L^2 \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M}} + \frac{\sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M}}{r_0} \quad (3.130)$$

Por lo tanto, el término de borde será:

$$I_B = -\frac{1}{8\pi G} \int_0^\beta dt_E \int_0^{2\pi} d\phi r_0 \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M} \left(\frac{r_0}{L^2 \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M}} + \frac{\sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M}}{r_0} \right)$$

$$I_B = \frac{\beta}{4G} \left(M - \frac{2r_0^2}{L^2} \right) \quad (3.131)$$

Contra-término

Como podemos notar de $I_{E-H} + I_B$:

$$I_{E-H} + I_B = -\frac{\beta r_0^2}{4GL^2} \quad (3.132)$$

En el borde, $r_0 \rightarrow \infty$, dicha suma será divergente. Por tal motivo, se fijará el valor de K_0 en (3.111) de tal manera que se obtenga un valor finito para I_E .

Tenemos:

$$I_{CT} = -\frac{1}{8\pi G} \int_0^\beta dt_E \int_0^{2\pi} d\phi r_0 \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M} K_0 \quad (3.133)$$

$$I_{CT} = -\frac{\beta K_0 r_0}{4G} \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M} \quad (3.134)$$

Ahora, la acción I_E , sera:

$$I_E = I_{E-H} + I_B + I_{CT} \quad (3.135)$$

$$= -\frac{\beta r_0^2}{4GL^2} - \frac{\beta K_0 r_0}{4G} \sqrt{\frac{r_0^2}{L^2} - M} \quad (3.136)$$

Realizando la expansión en $r_0 \rightarrow \infty$, tenemos:

$$I_E = -\frac{\beta r_0^2}{4GL^2} - \frac{\beta K_0}{4G} \left[\frac{r_0^2}{L} - \frac{LM}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r_0^2}\right) \right] \quad (3.137)$$

Donde $\mathcal{O}\left(\frac{1}{r_0^2}\right) \approx 0$. Luego:

$$I_E \approx -\frac{\beta r_0^2}{4GL^2} - \frac{\beta K_0 r_0^2}{4GL} + \frac{\beta K_0 LM}{8G} \quad (3.138)$$

Evidentemente, a fin de eliminar la divergencia en $r_0 \rightarrow \infty$, tenemos:

$$K_0 = -\frac{1}{L} \quad (3.139)$$

Por lo tanto, de (3.139) y (3.104), la acción Euclídea para BTZ , será:

$$I_E \approx -\frac{\pi^2 L^2}{2G\beta} \quad (3.140)$$

De esta manera, podemos obtener la entropía S asociada a dicho agujero negro:

$$S = (\beta \partial_\beta - 1) I_E \quad (3.141)$$

$$S = \frac{2\pi\sqrt{ML}}{4G} \quad (3.142)$$

La cual encaja, precisamente, con la ley de área de Hawking-Bekenstein [11]

$$S = \frac{A}{4G} \quad (3.143)$$

Donde, para el caso de BTZ , el área A será la longitud de la circunferencia de radio $r_+ = \sqrt{ML}$:

$$A = 2\pi\sqrt{ML} \quad (3.144)$$

Finalmente, para E , tenemos:

$$E = \partial_\beta I_E \quad (3.145)$$

$$E = \frac{M}{8G} \quad (3.146)$$

Debido a la forma de la expresión para E , algunos autores fijan $G = \frac{1}{8}$.

3.2.6. Geometría asintótica

Un espacio-tiempo en $(d+1)$ dimensiones $(M, g_{\mu\nu})$ será considerado asintóticamente AdS [23], si existe una variedad \tilde{M} con borde $\partial\tilde{M}$ y métrica será $\tilde{g}_{\mu\nu}$. Siempre que:

1. $g_{\mu\nu}$ satisface la ecuación de Einstein-Hilbert (3.23) con $\Lambda < 0$, y el tensor de energía-momento $T_{\mu\nu}$, sea tal que $\Omega^{2-d}T_{\mu\nu}$ permanezca suave sobre $\partial\tilde{M}$.
2. $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu}$. Donde Ω es definida positiva y suave en el interior de la variedad \tilde{M} .
3. El borde $\partial\tilde{M}$ tendrá topología $S^{d-1} \otimes \mathbb{R}$.
4. Ω será nulo sobre $\partial\tilde{M}$, mientras $\nabla_\mu \Omega$ permanecerá finito en dicha región.
5. El tensor de Weyl para $\tilde{g}_{\mu\nu}$ será suave en \tilde{M} y nulo en $\partial\tilde{M}$.

Para BTZ ($d = 2$), la condición 1 queda satisfecha. Como sabemos, la métrica $g_{\mu\nu}$ (3.88) es solución de la ecuación de Einstein-Hilbert (3.23). Además, $T_{\mu\nu} = 0$.

Luego, para satisfacer la condición 2 definimos:

$$\Omega := \frac{1}{r} \quad (3.147)$$

Tal que, el elemento de línea $\tilde{g}_{\mu\nu}$, con $\tilde{t} = t/L$, será:

$$d\tilde{s}^2 = -(1 - ML^2\Omega^2)d\tilde{t}^2 + \frac{d\Omega^2}{\frac{1}{L^2} - \Omega^2 M} + d\phi^2 \quad (3.148)$$

Por ende, Ω estará definida positiva y suave al interior de \tilde{M} .

En el borde $\Omega = 0$ ($r \rightarrow \infty$):

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\phi^2 \quad (3.149)$$

Por lo tanto, la topología de $\partial\tilde{M}$ será $\mathbb{R} \otimes S^1$. Lo cual satisface la condición 3.

La condición 4 quedará satisfecha, directamente, al inspeccionar el elemento de línea de la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$ dado en (3.148):

$$\Omega \Big|_{\partial\tilde{M}} = 0 \quad (3.150)$$

$$\nabla_\Omega \Omega \Big|_{\partial\tilde{M}} = 1 \quad (3.151)$$

Finalmente, la condición 5 se satisface trivialmente. Como sabemos, en $(2+1)$ el tensor de Weyl es nulo (3.20).

En conclusión, BTZ es asintóticamente AdS_3 .

3.2.7. Estructura global: Diagrama de Penrose-Carter

Sea el elemento de línea de BTZ :

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (3.152)$$

Para determinar la estructura causal global construiremos el diagrama de Penrose-Carter.

Para ello, tomaremos el elemento de línea correspondiente a rayos de luz radiales para $\phi = \phi_0$:

$$dt^2 = \frac{dr^2}{\left(\frac{r^2}{L^2} - M\right)^2} \quad (3.153)$$

Con la finalidad de definir coordenada nulas, definimos la variable r_* :

$$r_* := \int \frac{dr}{\frac{r^2}{L^2} - M} = \frac{L^2}{2r_+} \left[\ln \left| 1 - \frac{r}{r_+} \right| - \ln \left| 1 + \frac{r}{r_+} \right| \right] \quad (3.154)$$

Tal que, de (3.154) en (3.153), obtenemos:

$$t = \pm r_* \quad (3.155)$$

Definimos las coordenadas nulas asociadas a (t, r_*) :

$$u = t - r_* \quad (3.156)$$

$$v = t + r_* \quad (3.157)$$

Luego, la métrica (3.152) en coordenadas nulas $\{u, v\}$, será:

$$ds^2 = -N(r)^2 du dv \quad (3.158)$$

Donde hemos omitido el elemento de línea de la circunferencia $S^1 = d\phi^2$. Además:

$$N(r)^2 = \frac{r^2}{L^2} - M \quad (3.159)$$

Ahora, asociamos las coordenadas nulas $\{u, v\}$ con las coordenadas $\{U, V\}$, mediante:

$$U = -e^{-\frac{r_+}{L^2}u} \quad (3.160)$$

$$V = e^{\frac{r_+}{L^2}v} \quad (3.161)$$

Dicha transformación nos recuerda aquella realizada entre las coordenadas nulas de Minkowski y Rindler en el capítulo 1 ((1.54)-(1.55)). Evidentemente, la relación entre las coordenadas $\{u, v\}$ y $\{U, V\}$ será análoga a las mencionadas anteriormente.

Luego, el elemento de línea toma la siguiente forma:

$$ds^2 = -\frac{L^4}{r_+^2} N(r)^2 e^{-\frac{2r_+ r_*}{L^2}} dU dV \quad (3.162)$$

Para hacer ‘finito el infinito’, definimos:

$$U = \tan \tilde{u} \quad (3.163)$$

$$V = \tan \tilde{v} \quad (3.164)$$

De esta manera los valores $\pm\infty$ en U y V , corresponderá a $\pm\frac{\pi}{2}$ en \tilde{u} y \tilde{v} . El elemento de línea correspondiente, será:

$$ds^2 = -\frac{L^4}{r_+^2} N(r)^2 e^{-\frac{2r_+ r_*}{L^2}} \sec^2 \tilde{u} \sec^2 \tilde{v} d\tilde{u} d\tilde{v} \quad (3.165)$$

Sabemos del apéndice B que la transformación conforme de la métrica conserva la estructura causal. Por lo tanto, para $\Omega^2 = \sec^2 \tilde{u} \sec^2 \tilde{v}$:

$$ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2 \quad (3.166)$$

Tenemos:

$$d\tilde{s}^2 = -\frac{L^4}{r_+^2} N(r)^2 e^{-\frac{2r_+ r_*}{L^2}} d\tilde{u} d\tilde{v} \quad (3.167)$$

Definimos las variables asociadas a las coordenadas nulas $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$:

$$T = \tilde{v} + \tilde{u} \quad (3.168)$$

$$R = \tilde{v} - \tilde{u} \quad (3.169)$$

De esta forma, el elemento de línea obtenido para las coordenadas (T, R) , será:

$$d\tilde{s}^2 = \frac{L^4}{4r_+^2} N(r)^2 e^{-\frac{2r_+ r_*}{L^2}} [-dT^2 + dR^2] \quad (3.170)$$

Finalmente, arribamos a la métrica (3.170), la cual tiene dos ventajas fundamentales: ser conforme a Minkowski y tener rangos finitos. Gracias a la primera, tenemos preservada la estructura causal de un fondo plano, con lo cual será sencilla la introducción de conos de luz, mientras la segunda, hace ‘finito el infinito’, debido a los mapeos vistos anteriormente.

A fin de elaborar el diagrama de Penrose-Carter, verificamos los mapeos de $r = 0$, $r = r_+$ y $r \rightarrow \infty$ en el plano (T, R) :

$$UV = -e^{\frac{2r_+ r_*}{L^2}} \quad (3.171)$$

De (3.163), (3.164) y (3.154):

$$\tan \tilde{u} \tan \tilde{v} = -\left[\frac{r - r_+}{r + r_+} \right] \quad (3.172)$$

En coordenadas (T, R) :

$$\tan \left(\frac{T - R}{2} \right) \tan \left(\frac{T + R}{2} \right) = -\left[\frac{r - r_+}{r + r_+} \right] \quad (3.173)$$

Para $r = 0$:

$$\tan\left(\frac{T-R}{2}\right)\tan\left(\frac{T+R}{2}\right) = 1 \rightarrow T = \pm\frac{\pi}{2} \quad (3.174)$$

Para $r = r_+$:

$$\tan\left(\frac{T-R}{2}\right)\tan\left(\frac{T+R}{2}\right) = 0 \rightarrow T = \pm R \quad (3.175)$$

Para $r \rightarrow \infty$:

Usamos:

$$\lim_{r \rightarrow \infty} -\left[\frac{r-r_+}{r+r_+}\right] = -1 \quad (3.176)$$

Luego:

$$\tan\left(\frac{T-R}{2}\right)\tan\left(\frac{T+R}{2}\right) = -1 \rightarrow R = \pm\frac{\pi}{2} \quad (3.177)$$

Además, para los infinitos pasado y futuro tipo-tiempo:

i^+ Para $t \rightarrow \infty$: $(T, R) = (\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

i^- Para $t \rightarrow -\infty$: $(T, R) = (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.

Por otro lado, para el infinito futuro tipo-luz I^+ ($v \rightarrow \infty$), tenemos que $T = -R + \pi$, mientras, para el infinito pasado tipo-luz I^- ($u \rightarrow -\infty$), $T = R - \pi$. Ambas regiones están fuera de la región delimitada por el infinito espacial $r \rightarrow \infty$. Por lo tanto, para BTZ no se tendrán las regiones I^+ y I^- , lo cual reflejará una característica esencial de este espacio-tiempo: Los rayos de luz van al infinito y retornan en un tiempo finito

De I^+ , I^- , (3.174), (3.175) y (3.177), y sus reflejos al lado izquierdo del gráfico a continuación, tenemos:

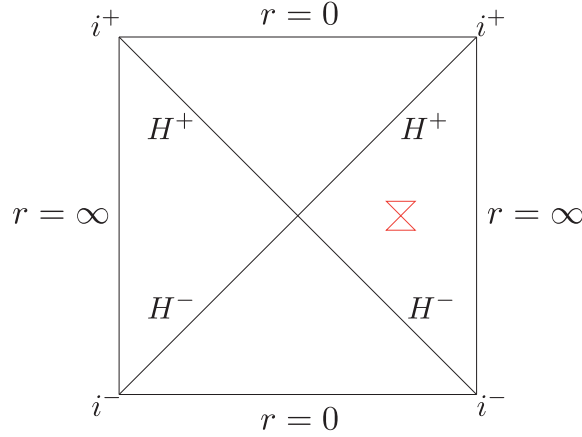


Figura 3.1: Diagrama de Penrose-Carter para el espacio-tiempo BTZ .

Finalmente, a la luz de todos los resultados obtenidos hasta el momento, podemos decir que BTZ es una solución de la ecuación de Einstein-Hilbert, la cual posee agujero negro. No obstante, es local, y asintóticamente, AdS_3 . Por lo tanto, localmente tiene curvatura constante negativa, con lo cual $r = r_+$ es una singularidad de coordenadas, mas no física. Además, de la forma del escalar de Kretschmann (3.91), es evidente la ausencia de singularidades físicas. De esta forma, concluimos que la naturaleza termodinámica de BTZ yace en su estructura causal.

3.3. Dual holográfico de BTZ

De la correspondencia AdS/CFT [7][8][9] sabemos que un espacio-tiempo anti-de Sitter AdS en $d + 1$ dimensiones, con topología M , es dual a una teoría cuántica de campos con simetría conforme CFT , la cual tendrá una dimensión espacial menos, y topología ∂M .

Además, BTZ es asintóticamente ($r \rightarrow \infty$) AdS_3 . Del diagrama de Penrose-Carter para BTZ , tenemos:

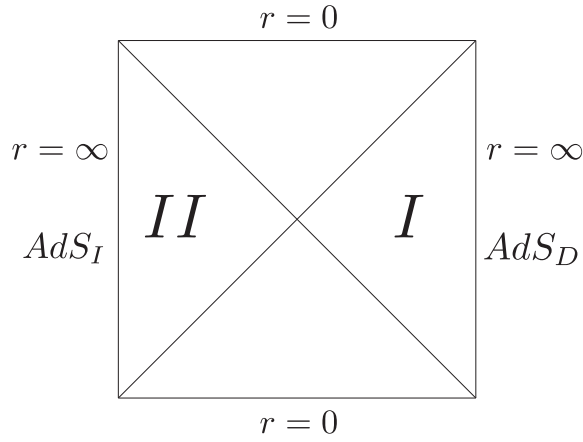


Figura 3.2: Regiones asintóticas $r \rightarrow \infty$ de BTZ .

Evidentemente, las regiones I y II se encuentran causalmente desconectadas.

Por otro lado, del elemento de línea de BTZ en signatura Euclidiana:

$$ds^2 = \left(\frac{r^2}{L^2} - M \right) dt_E^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} - M \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.178)$$

Para $r \rightarrow \infty$:

$$ds^2 = \frac{r^2}{L^2} dt_E^2 + r^2 d\phi^2 \quad (3.179)$$

Notamos que la topología asintótica es $S_\beta \otimes S^1$.

Por lo tanto, la integral de camino Euclidiana que preparará el estado de la teoría en el borde para su evolución en el tiempo Lorentziano ($t = 0$) tendrá la siguiente topología:

$$\frac{\beta}{2} \otimes S^1 \quad (3.180)$$

De esta manera, el intervalo de tiempo Euclidiano $\frac{\beta}{2}$ hará contacto con las regiones asintóticas de BTZ en $t = 0$ mediante dos circunferencias S^1 .

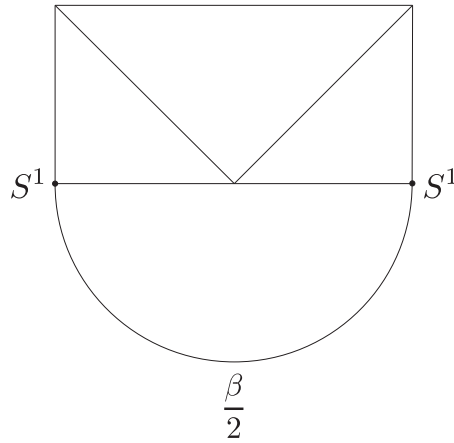


Figura 3.3: Geometría Euclidiana y Lorentziana de BTZ unida en $t = 0$.

Por consiguiente, la integral de camino Euclidiana para la teoría cuántica de campos dual a BTZ , la cual preparará el estado cuántico de dicha teoría para su evolución en $t = 0$, tendrá la topología mencionada en (3.180). Por tal motivo, las circunferencias S^1 , del lado izquierdo y derecho en la Figura 3.3, corresponderán a la topología espacial de las $CFTs$, causalmente desconectadas, duales a las regiones asintóticas de BTZ .

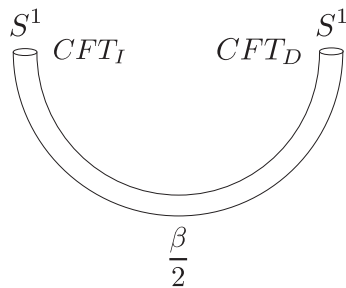


Figura 3.4: Topología de la integral de camino Euclidiana para la teoría cuántica de campos dual a BTZ .

Precisamente, la integral de camino descrita corresponde a aquella que establece el estado de vacío de la teoría cuántica como el Thermofield Double State *TFD*:

$$\langle \phi | 0(t=0) \rangle \propto \langle \phi_D | e^{-\frac{\beta}{2}H} | \phi_I \rangle \quad (3.181)$$

Dicho estado se desarrolló en el capítulo anterior (2.168) y es descrito en términos del entrelazamiento cuántico de los estados de energía en cada una de las *CFTs* con topología espacial S^1 .

Tenemos:

$$|0(t=0)\rangle = \sum_n \frac{e^{-\frac{\beta}{2}E_n}}{\sqrt{Z(\beta)}} |n_D\rangle \otimes \Theta |n_I\rangle \quad (3.182)$$

Donde, $|n_D\rangle$ y $|n_I\rangle$ son los estados del operador Hamiltoniano para las *CFTs* derecha e izquierda, respectivamente, y Θ es el operador antiunitario *CPT*; ya que, en la región *II* el tiempo se propaga en sentido contrario a *I* (Apéndice G).

Por lo tanto, la teoría dual a la geometría extendida de *BTZ* será aquella con estado de vacío dado por el estado *TFD* (3.182).

De esta forma, la conexión clásica entre las regiones asintóticas de *I* y *II* (Figura 3.2), dada por un agujero de gusano (ER)³, corresponderá holográficamente a la conexión cuántica entre las *CFTs* duales a AdS_I y AdS_D , dada por el entrelazamiento cuántico (EPR)⁴.

³Puente de Einstein-Rosen [24].

⁴Par Einstein-Podolsky-Rosen [25].

3.4. ER=EPR

En la sección anterior obtuvimos la teoría de campos dual a BTZ , donde el estado de vacío corresponde al Thermofield Double State (3.182).

Por otro lado, si sobre AdS_3 situamos un par de $CFTs$ $\{\phi_I, \phi_D\}$ entrelazadas a temperatura finita β^{-1} , donde una de ellas se sitúa en la región derecha, y la otra, en la izquierda, infinitamente distanciadas. De tal forma que, para N pares de partículas (entrelazadas) correspondiente a dichos campos⁵, tendremos:

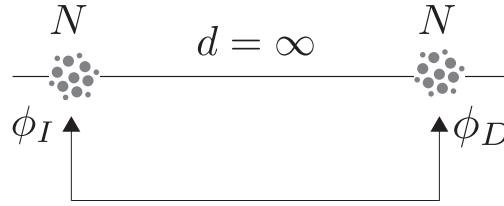


Figura 3.5: N pares de partículas entrelazadas sobre AdS_3 .

Cuando el cúmulo de partículas correspondiente a cada campo alcance la masa (energía) crítica ($N \rightarrow \infty$), tendremos dos agujeros negros con interacción despreciable debido a su separación ($d \rightarrow \infty$). Además, las regiones exteriores a cada uno será BTZ [26].

Bajo esta premisa, los campos $\{\phi_I, \phi_D\}$ se encontrarán causalmente desconectados. Por ende, el operador de campo escalar real sin masa ϕ correspondiente a la teoría cuántica total:

$$|\phi\rangle = |\phi_I\rangle \otimes |\phi_D\rangle \quad (3.183)$$

Tendrá como estado base el TFD .

Por lo tanto, en vista de lo desarrollado en la sección anterior, a nivel clásico el entrelazamiento entre $\{\phi_I, \phi_D\}$ implicará la existencia de un agujero de gusano entre los agujeros negros derecho e izquierdo (Figura 3.6).

⁵Formarán 2 cumulos, cada uno de ellos representará un colectivo canónico a temperatura finita β^{-1} .

Evidentemente, ninguna señal emitida desde la región externa del horizonte derecho hacia su interior afectará la región externa del horizonte izquierdo, y viceversa. Por ende, no habrá violación de causalidad en esta construcción.

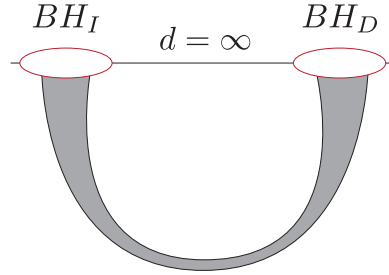


Figura 3.6: Agujero de Gusano conectando el interior de los agujeros negros derecho e izquierdo.

De esta manera, hemos obtenido una realización particular de la conjetura de Maldaena-Susskind [27], en este caso, para el espacio-tiempo BTZ ⁶. Finalmente, tendremos:

$$ER = EPR \quad (3.184)$$

⁶Los resultados obtenidos en BTZ pueden generalizarse para $d \geq 2$, i.e., *Schwarzschild-AdS*_{d+1}

Conclusiones

En el primer capítulo elaboramos de forma consistente la transformación de coordenadas entre un sistema inercial y otro bajo aceleración constante, ambos situados en el fondo de Minkowski $(1+1)$. Tal que, para el no inercial, obtuvimos una estructura causal similar a la de un agujero negro eterno.

En el segundo capítulo mostramos en detalle la percepción física del observador no inercial en Minkowski (Efecto Unruh) y la construcción de los estados del operador de campo sobre dicha geometría, el cual es obtenido a partir del producto tensorial de los estados en las cuñas de Rindler. Además, brindamos la secuencia lógica de la elaboración del Thermofield Double State, la cual resulta de suma importancia, debido a que, suele hacerse de manera superficial o errada en la literatura estándar.

En el tercer capítulo desarrollamos el análisis de la gravedad en $(2+1)$, para $\Lambda = 0$ y $\Lambda < 0$ (curvatura constante negativa), donde la última corresponde a AdS_3 . Tal que, al realizar la identificación en dicha topología mediante un vector Killing tipo-espacio, con periodicidad de 2π , obtuvimos la solución de agujero negro denominada BTZ , el cual posee todas las características vistas en $(d+1)$ para $d \geq 2$, salvo la existencia de singularidad física en $r = 0$. Además, se calculó en detalle la integral de camino Euclídea (términos de Einstein-Hilbert, Borde (GHY) y Contratérmino) y se llevó a cabo la construcción del diagrama de Penrose-Carter. Luego, aplicando la correspondencia AdS/CFT , y a partir de los resultados obtenidos en el capítulo 2, obtuvimos el TFD como dual holográfico de BTZ . Finalmente, mostramos una realización particular de la conjetura Maldacena-Susskind para espacio-tiempos asintóticamente AdS .

En conclusión:

A la luz de la correspondencia AdS/CFT , los agujeros de gusano son duales al entrelazamiento cuántico. Es decir:

$$ER = EPR$$

Apéndice A

Coordenadas nulas

Para un espacio-tiempo del tipo (t, x) , con elemento de línea Minkowski o conforme a este, las superficies nulas (conjunto de trayectorias para entes sin masa) están definidas por:

$$x \pm t = 0 \quad (\text{A.1})$$

Etiquetándolas:

$$\bar{v}(t; x) = t + x \quad (\text{A.2})$$

$$\bar{u}(t; x) = t - x \quad (\text{A.3})$$

Los covectores normales a estas se obtienen, como es usual, tomando sus gradientes.

Para $v = t + x$:

$$\partial_\mu \bar{v} = \bar{v}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}; \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{v} \quad (\text{A.4})$$

$$\bar{v}_\mu = (1; 1) \quad (\text{A.5})$$

Para $u = t - x$:

$$\partial_\mu \bar{u} = \bar{u}_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial t}; \frac{\partial}{\partial x} \right) \bar{u} \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{u}_\mu = (1; -1) \quad (\text{A.7})$$

Luego:

$$\bar{v}^\mu \bar{v}_\mu = 0 \tag{A.8}$$

$$\bar{u}^\mu \bar{u}_\mu = 0 \tag{A.9}$$

Como podemos ver, los vectores normales a superficies nulas son tipo-luz o nulos. Por ello, \bar{v} y \bar{u} se denominarán coordenadas nulas.

Apéndice B

Transformación Conforme

Sea el elemento de línea arbitrario, dado por la métrica $g_{\mu\nu}$:

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.1})$$

Se define al elemento de línea conforme a (B.1) como aquel dado por la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$, la cual resulta de realizar la transformación conforme:

$$\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 g_{\mu\nu} \quad (\text{B.2})$$

Donde $\Omega(x)^2$ se denomina factor conforme y es una función positiva y suave de las coordenadas. Luego:

$$d\tilde{s}^2 = \tilde{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \Omega^2 g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (\text{B.3})$$

$$d\tilde{s}^2 = \Omega^2 ds^2 \quad (\text{B.4})$$

De la definición anterior, si hacemos que $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ (métrica de Minkowski), para la transformación conforme (B.2), $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega^2 \eta_{\mu\nu}$, se obtienen las siguientes propiedades:

Propiedad 1: La longitud no se conserva

$$\overline{A^\mu A_\mu} = \tilde{g}_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \Omega(x)^2 \eta_{\mu\nu} A^\mu A^\nu = \Omega(x)^2 A^\mu A_\mu \quad (\text{B.5})$$

De este resultado se nota la importancia de que la función $\Omega(x)^2$ sea positiva, de esta forma sólo varía la longitud de los vectores, mas no su tipo:

- Tipo-tiempo: $A^\mu A_\mu < 0 \rightarrow \overline{A^\mu A_\mu} < 0$.
- Tipo-espacio: $A^\mu A_\mu > 0 \rightarrow \overline{A^\mu A_\mu} > 0$.
- Nulo: $A^\mu A_\mu = 0 \rightarrow \overline{A^\mu A_\mu} = 0$.

Propiedad 2: El ángulo entre dos vectores se conserva:

Para un vector tipo-tiempo, la naturaleza pseudo-Riemanniana de Minkowski permite establecer la siguiente estructura:

$$x^\mu = (\|x\| \sinh \beta, \|x\| \cosh \beta) \quad (\text{B.6})$$

Donde $\|x\| = \sqrt{x^\mu x_\mu}$.

Luego, para los 4-vectores A^μ y B^μ , tal que:

$$A^\mu = (\|A\| \sinh(\alpha + \theta), \|A\| \cosh(\alpha + \theta)) \quad (\text{B.7})$$

$$B^\mu = (\|B\| \sinh(\alpha), \|B\| \cosh(\alpha)) \quad (\text{B.8})$$

Del producto, se obtiene:

$$\cosh(\theta) = \frac{g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}{\|A\| \|B\|} \quad (\text{B.9})$$

Para la transformación conforme ($\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}$):

$$\cosh(\tilde{\theta}) = \frac{\tilde{g}_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}{\|\tilde{A}\| \|\tilde{B}\|} = \frac{\Omega(x)^2 g_{\mu\nu} A^\mu B^\nu}{\Omega(x) \|A\| \Omega(x) \|B\|} \quad (\text{B.10})$$

De la expresión anterior se obtiene:

$$\cosh(\tilde{\theta}) = \cosh(\theta) \quad (\text{B.11})$$

Propiedad 3: Se conservan las geodésicas nulas:

Sea el símbolo de Christoffel para la métrica $\tilde{g}_{\mu\nu}$:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha = \frac{1}{2} \tilde{g}^{\alpha\beta} (\tilde{g}_{\beta\mu,\nu} + \tilde{g}_{\beta\nu,\mu} - \tilde{g}_{\mu\nu,\beta}) \quad (\text{B.12})$$

Donde, la ecuación geodésica será:

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tilde{\omega}^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^\nu}{d\tilde{\omega}} = 0 \quad (\text{B.13})$$

Definimos $\tilde{g}^{\mu\nu}$ conforme a la métrica arbitraria $g^{\mu\nu}$, i.e., $\tilde{g}_{\mu\nu} = \Omega(x)^2 g_{\mu\nu}$. Luego:

$$\tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} = \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} + \delta_{\mu}^{\alpha} \Omega^{-1} \partial_{\nu} \Omega + \delta_{\nu}^{\alpha} \Omega^{-1} \partial_{\mu} \Omega - g_{\mu\nu} \Omega^{-1} \partial^{\alpha} \Omega \quad (\text{B.14})$$

Reemplazando en (B.13):

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tilde{\omega}^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^{\nu}}{d\tilde{\omega}} &= \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tilde{\omega}^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^{\nu}}{d\tilde{\omega}} \\ &\quad + 2\Omega^{-1} \partial_{\nu} \Omega \frac{dx^{\alpha}}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^{\nu}}{d\tilde{\omega}} - g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^{\nu}}{d\tilde{\omega}} \Omega^{-1} \partial^{\alpha} \Omega = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Realizando la parametrización afín entre $\tilde{\omega}$ y ω , en $\tilde{g}_{\mu\nu}$ y $g_{\mu\nu}$, respectivamente:

$$d\tilde{\omega} = \Omega^2 d\omega \quad (\text{B.16})$$

Obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tilde{\omega}^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^{\nu}}{d\tilde{\omega}} &= \Omega^{-4} \left[\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\omega^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} + 2\Omega^{-1} \partial_{\nu} \Omega \frac{dx^{\alpha}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} \right. \\ &\quad \left. + \Omega^2 \frac{d\Omega^{-2}}{d\omega} \frac{dx^{\alpha}}{d\omega} - g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} \Omega^{-1} \partial^{\alpha} \Omega \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.17})$$

Donde, evidentemente:

$$2\Omega^{-1} \partial_{\nu} \Omega \frac{dx^{\alpha}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} + \Omega^2 \frac{d\Omega^{-2}}{d\omega} \frac{dx^{\alpha}}{d\omega} = 0 \quad (\text{B.18})$$

Con lo cual, (B.17) resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tilde{\omega}^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^{\nu}}{d\tilde{\omega}} &= \Omega^{-4} \left[\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\omega^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} + \right. \\ &\quad \left. - g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} \Omega^{-1} \partial^{\alpha} \Omega \right] = 0 \end{aligned} \quad (\text{B.19})$$

Como podemos apreciar, únicamente para geodésicas tipo-luz (nulas):

$$g_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} = 0 \quad (\text{B.20})$$

Tendremos:

$$\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\tilde{\omega}^2} + \tilde{\Gamma}_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\tilde{\omega}} \frac{dx^{\nu}}{d\tilde{\omega}} = \Omega^{-4} \left[\frac{d^2 x^{\alpha}}{d\omega^2} + \Gamma_{\mu\nu}^{\alpha} \frac{dx^{\mu}}{d\omega} \frac{dx^{\nu}}{d\omega} \right] = 0 \quad (\text{B.21})$$

Por lo tanto, en vista que Ω es definida positiva y suave, tendremos que si x^μ , con parámetro $\tilde{\omega}$ es una geodésica tipo-luz (nula) en $\tilde{g}_{\mu\nu}$, también lo será en $g_{\mu\nu}$, con ω . De esta forma, el mapeo conforme hereda la estructura causal.

Apéndice C

Tiempo Imaginario y Espacio Euclidiano

Aplicando la rotación de Wick:

$$\tau_E := i\tau \quad (\text{C.1})$$

En el elemento de línea del espacio-tiempo Rindler (1.66), obtenemos su versión en signatura Euclidiana:

$$ds_E^2 = e^{2g\xi} d\tau_E^2 + e^{2g\xi} d\xi^2 \quad (\text{C.2})$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$e^{2g\xi} d\xi^2 = d\rho^2 \quad (\text{C.3})$$

Obtenemos:

$$\frac{e^{2g\xi}}{g^2} = \rho^2 \quad (\text{C.4})$$

El elemento de línea (C.2) será:

$$ds^2 = \rho^2 g^2 d\tau_E^2 + d\rho^2 \quad (\text{C.5})$$

Evidentemente, la transformación al plano polar (θ, ρ) quedará consolidada mediante:

$$g^2 d\tau^2 = d\theta^2 \quad (\text{C.6})$$

Tal que:

$$g\tau = \theta \tag{C.7}$$

Con lo cual, tendremos el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = \rho^2 d\theta^2 + d\rho^2 \tag{C.8}$$

De esta forma, el mapeo entre Minkowski en signatura Euclidiana (t_E, x) , obtenido al aplicar la rotación de Wick $t_E = it$, y el plano polar (θ, ρ) , será:

$$\begin{aligned} x &= \rho \cos \theta \\ t_E &= \rho \sin \theta \end{aligned} \tag{C.9}$$

Apéndice D

Estados puros, mixtos y entrelazados

D.1. Matriz de densidad pura

Se define la matriz de densidad pura asociada a $|\psi\rangle$:

$$\rho := |\psi\rangle \langle\psi| \quad (\text{D.1})$$

Tal que $|\psi\rangle$ es un estado puro:

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1 \quad (\text{D.2})$$

Y satisface las siguientes propiedades:

$$\rho^2 = \rho \quad (\text{D.3})$$

$$\text{tr } \rho^2 = 1 \quad (\text{D.4})$$

D.2. Matriz de densidad mixta

Definimos la matriz de densidad mixta asociada a los estados puros $|\psi_i\rangle$:

$$\tilde{\rho} = \sum_i p_i |\psi_i\rangle \langle\psi_i| \quad (\text{D.5})$$

La cual satisface las siguientes propiedades:

$$\rho^2 \neq \rho \quad (\text{D.6})$$

$$\text{tr } \rho^2 < 1 \quad (\text{D.7})$$

D.3. Matriz de densidad reducida

D.3.1. Estados producto

Consideremos el estado $|\psi_{AB}\rangle$ definido en el espacio de Hilbert¹:

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B \quad (\text{D.8})$$

Tal que, $|\psi_{AB}\rangle$ se expresa como el producto tensorial de los estados puros definidos en \mathcal{H}_A y \mathcal{H}_B :

$$|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (\text{D.9})$$

Luego, la matriz de densidad:

$$\rho_{AB} = |\psi_{AB}\rangle \langle \psi_{AB}| \quad (\text{D.10})$$

Será, evidentemente, pura; ya que:

$$\langle \psi_{AB} | \psi_{AB} \rangle = 1 \quad (\text{D.11})$$

Además, podemos obtener la matriz de densidad para cada subsistema (matriz de densidad reducida), tomando la traza de aquel que deseamos excluir de ρ . Por ejemplo, para ρ_A (análogo para ρ_B), tendremos:

$$\rho_A = \text{tr}_B \rho_{AB} \quad (\text{D.12})$$

Entonces:

$$\rho_A = \langle \psi_B | \rho_{AB} | \psi_B \rangle \quad (\text{D.13})$$

$$= |\psi_A\rangle \langle \psi_A| \quad (\text{D.14})$$

Queda claro que ρ_A y ρ_B serán matrices puras.

¹Se puede generalizar al producto tensorial de n espacios de Hilbert, no obstante, debido al interés del trabajo, usaremos $n = 2$.

D.3.2. Estados entrelazados

Como sabemos, un estado entrelazado $|\psi_{AB}\rangle$ no puede descomponerse como un producto tensorial de estados:

$$|\psi_{AB}\rangle \neq |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle \quad (\text{D.15})$$

Por ejemplo, para el siguiente estado entrelazado:

$$|\psi_{AB}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}[|0_A\rangle \otimes |1_B\rangle + |1_A\rangle \otimes |0_B\rangle] \quad (\text{D.16})$$

Elaborado con las bases de los estados $|\psi_A\rangle$ y $|\psi_B\rangle$.

Notamos que $|\psi_{AB}\rangle$ es puro:

$$\langle\psi_{AB}|\psi_{AB}\rangle = 1 \quad (\text{D.17})$$

Además, la matriz de densidad reducida para los elementos del subsistema A , será:

$$\rho_A = \frac{1}{2}[|0_A\rangle\langle 0_A| + |1_A\rangle\langle 1_A|] \quad (\text{D.18})$$

Tal que:

$$\rho_A^2 \neq \rho_A \quad (\text{D.19})$$

Por lo tanto, ρ_A es una matriz de densidad mixta (lo mismo para ρ_B).

Finalmente, de lo visto en las subsecciones [D.3.1](#) y [D.3.2](#), diremos:

- $|\psi_{AB}\rangle$ es un estado entrelazado de los estados $\{|0_A\rangle, |1_A\rangle, |0_B\rangle, |1_B\rangle\}$, si la matriz de densidad reducida ρ_A es mixta.
- $|\psi_{AB}\rangle$ no es un estado entrelazado (es un estado producto $|\psi_{AB}\rangle = |\psi_A\rangle \otimes |\psi_B\rangle$), si la matriz de densidad reducida ρ_A es pura.

Apéndice E

Operadores antilineales y antiunitarios

E.1. Operador antilineal

Revisar [28]

Se define la acción del operador antilineal Θ sobre $|\phi\rangle$ y $\langle\phi|$:

$$\Theta |\phi\rangle = \Theta \left(\sum_i a_i |\phi_i\rangle \right) := \sum_i a_i^* (\Theta |\phi_i\rangle) \quad (\text{E.1})$$

$$\langle\phi| \Theta = \left(\sum_i a_i^* \langle\phi_i| \right) \Theta := \sum_i a_i (\langle\phi_i| \Theta) \quad (\text{E.2})$$

De ambas expresiones:

$$(\langle\phi| \Theta) |\psi\rangle := [\langle\phi| (\Theta |\psi\rangle)]^* \quad (\text{E.3})$$

$$c\Theta := \Theta c^* \quad (\text{E.4})$$

Donde $c \in \mathbb{C}$.

Además, el adjunto de Θ se define de forma usual:

$$(\Theta |\phi\rangle)^\dagger := \langle\phi| \Theta^\dagger \quad (\text{E.5})$$

Es muy importante tener en cuenta sobre quien se está aplicando el operador antilineal. Por ejemplo, para los operadores Θ_1 y Θ_2 :

$$\langle \phi | (\Theta_1 \Theta_2) | \psi \rangle = (\langle \phi | \Theta_1 \Theta_2) | \psi \rangle \quad (\text{E.6})$$

$$= \langle \phi | (\Theta_1 \Theta_2 | \psi \rangle) \quad (\text{E.7})$$

$$= [(\langle \phi | \Theta_1)(\Theta_2 | \psi \rangle)]^* \quad (\text{E.8})$$

E.2. Operador antiunitario

Un operador antiunitario Θ será aquel que sea antilineal y unitario:

$$\Theta^\dagger = \Theta^{-1} \quad (\text{E.9})$$

Finalmente:

$$|\psi\rangle = \Theta |\phi\rangle \quad (\text{E.10})$$

$$\langle \psi | = \langle \phi | \Theta^\dagger \quad (\text{E.11})$$

$$\tilde{A} = \Theta A \Theta^\dagger \quad (\text{E.12})$$

Donde A es un operador lineal.

Apéndice F

AdS conforme a Minkowski

En el elemento de línea de AdS_3 :

$$ds^2 = L^2(-\cosh^2 \rho d\tilde{t}^2 + d\rho^2 + \sinh^2 \rho d\phi^2) \quad (F.1)$$

Hacemos $\rho = \ln 2r$:

$$ds^2 = L^2 \left[-\frac{16r^4 + 8r^2 + 1}{16r^2} d\tilde{t}^2 + \frac{dr^2}{r^2} + \frac{16r^4 - 8r^2 + 1}{16r^2} d\phi^2 \right] \quad (F.2)$$

Donde hemos usado las expresiones exponenciales para las funciones hiperbólicas.

Tomando el límite $r \rightarrow \infty$:

$$ds^2 = L^2 \left[-r^2 d\tilde{t}^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\phi^2 \right] \quad (F.3)$$

Haciendo $r = \frac{1}{z}$:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} [-d\tilde{t}^2 + d\phi^2 + dz^2] \quad (F.4)$$

Finalmente, ‘desenrollando’ las identificaciones en ϕ y \tilde{t} (3.30):

$$\phi \sim \phi + 2\pi \quad (F.5)$$

$$\tilde{t} \sim \tilde{t} + 2\pi \quad (F.6)$$

Tal que, tenemos:

$$-\infty < \tilde{t} < \infty \quad (F.7)$$

$$-\infty < \phi < \infty \quad (F.8)$$

Haciendo $\phi = \gamma$, a fin de evitar confusión:

$$ds^2 = \frac{L^2}{z^2} [-d\tilde{t}^2 + d\gamma^2 + dz^2] \quad (\text{F.9})$$

El elemento de línea (F.9) se denomina ‘Parche de Poincaré’, el cual, evidentemente, sólo cubre una región del espacio AdS_3 . Además, podemos notar que es conforme a Minkowski.

Apéndice G

Orientación temporal en la geometría extendida de BTZ

De (3.160) y (3.161):

$$U = -e^{-\frac{r_{\pm}}{L^2}(t-r_*)} \quad (\text{G.1})$$

$$V = e^{\frac{r_{\pm}}{L^2}(t+r_*)} \quad (\text{G.2})$$

Definimos:

$$U := \tilde{t} - \tilde{r} \quad (\text{G.3})$$

$$V := \tilde{t} + \tilde{r} \quad (\text{G.4})$$

De (G.1)-(G.4) , obtenemos:

$$\tilde{t} = \pm \sinh\left(\frac{r_{\pm}}{L^2}t\right) e^{\frac{r_{\pm}}{L^2}r_*} \quad (\text{G.5})$$

$$\tilde{r} = \pm \cosh\left(\frac{r_{\pm}}{L^2}t\right) e^{\frac{r_{\pm}}{L^2}r_*} \quad (\text{G.6})$$

Donde \pm define la transformación en las regiones derecha e izquierda (análogo a lo visto entre Minkowski y Rindler).

Por otro lado, el elemento de línea (3.158) es:

$$ds^2 = N(r)^2 (-dt^2 + dr_*^2) \quad (\text{G.7})$$

Donde, ∂_t es un vector Killing. Tal que:

$$\partial_t = \frac{\partial \tilde{t}}{\partial t} \partial_{\tilde{t}} + \frac{\partial \tilde{r}}{\partial t} \partial_{\tilde{r}} \quad (\text{G.8})$$

Calculando, tenemos:

$$\partial_t = \frac{r_+}{L^2}(\tilde{r}\partial_{\tilde{t}} + \tilde{t}\partial_{\tilde{r}}) \quad (\text{G.9})$$

En componentes contravariantes:

$$b^\mu = \left(\frac{r_+}{L^2}\tilde{r}, \frac{r_+}{L^2}\tilde{t} \right) \quad (\text{G.10})$$

De esta manera, al definir el vector unitario temporal:

$$\tilde{t}^\mu = (1, 0) \quad (\text{G.11})$$

Tenemos:

$$b^\mu \tilde{t}_\mu = -\frac{r_+}{L^2}\tilde{r} \quad (\text{G.12})$$

Donde, para la región izquierda $\tilde{r} < 0$, por lo tanto:

$$b^\mu t_\mu > 0 \quad (\text{G.13})$$

Lo cual significa que en la región izquierda, el tiempo va en sentido contrario a la derecha. Además, dada la transformación conforme entre $\{U, V\}$ y $\{\tilde{u}, \tilde{v}\}$ (3.162)-(3.165), en el diagrama de Penrose-Carter (Figura 3.2), en la región II t evoluciona en sentido contrario a T , mientras que en I , lo hace en el mismo sentido.

Apéndice H

Representación cilíndrica de AdS

Si en el elemento de línea de AdS_3 :

$$ds^2 = -\left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right)dt^2 + \left(\frac{r^2}{L^2} + 1\right)^{-1}dr^2 + r^2d\phi^2 \quad (H.1)$$

Hacemos:

$$r = L \tan \theta \quad (H.2)$$

$$t = L\tilde{t} \quad (H.3)$$

Obtenemos el siguiente elemento de línea:

$$ds^2 = \frac{L^2}{\cos^2 \theta} [-d\tilde{t}^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2] \quad (H.4)$$

El cual es conforme a:

$$d\tilde{s}^2 = -d\tilde{t}^2 + d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (H.5)$$

De (H.2), tenemos que el borde de AdS_3 ($r \rightarrow \infty$) corresponde a $\theta = \pi/2$. Luego, la topología del borde será:

$$\mathbb{R} \otimes S^1 \quad (H.6)$$

Finalmente, AdS_3 será un cilindro sólido:

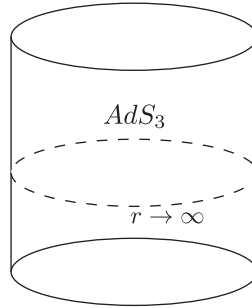


Figura H.1: Representación cilíndrica de AdS_3 .

Bibliografía

- [1] P. Francesco, P. Mathieu, and D. Sénéchal, *Conformal field theory*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [2] W. Israel, “Thermo-field dynamics of black holes,” *Physics Letters A*, vol. 57, no. 2, pp. 107–110, 1976.
- [3] J. Maldacena, “Eternal black holes in anti-de sitter,” *Journal of High Energy Physics*, vol. 2003, no. 04, p. 021, 2003.
- [4] D. Harlow, “Jerusalem lectures on black holes and quantum information,” *Reviews of Modern Physics*, vol. 88, no. 1, p. 015002, 2016.
- [5] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Black hole in three-dimensional spacetime,” *Physical Review Letters*, vol. 69, no. 13, p. 1849, 1992.
- [6] M. Banados, M. Henneaux, C. Teitelboim, and J. Zanelli, “Geometry of the 2+1 black hole,” *Physical Review D*, vol. 48, no. 4, p. 1506, 1993.
- [7] J. Maldacena, “The large- n limit of superconformal field theories and supergravity,” *International journal of theoretical physics*, vol. 38, no. 4, pp. 1113–1133, 1999.
- [8] S. S. Gubser, I. R. Klebanov, and A. M. Polyakov, “Gauge theory correlators from non-critical string theory,” *Physics Letters B*, vol. 428, no. 1-2, pp. 105–114, 1998.
- [9] E. Witten, “Anti de sitter space and holography,” *arXiv preprint hep-th/9802150*, 1998.
- [10] S. W. Hawking, “Black hole explosions?,” *Nature*, vol. 248, no. 5443, p. 30, 1974.
- [11] S. W. Hawking, “Particle creation by black holes,” *Communications in mathematical physics*, vol. 43, no. 3, pp. 199–220, 1975.
- [12] J. D. Bekenstein, “Black holes and entropy,” *Physical Review D*, vol. 7, no. 8, p. 2333, 1973.
- [13] J. D. Bekenstein, “Generalized second law of thermodynamics in black-hole physics,” *Physical Review D*, vol. 9, no. 12, p. 3292, 1974.
- [14] L. Susskind, “The world as a hologram,” *Journal of Mathematical Physics*, vol. 36, no. 11, pp. 6377–6396, 1995.
- [15] G. Hooft, “Dimensional reduction in quantum gravity,” *arXiv preprint gr-qc/9310026*, 1993.

- [16] J. D. Bekenstein, “Entropy bounds and black hole remnants,” *Physical Review D*, vol. 49, no. 4, p. 1912, 1994.
- [17] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry. An introduction to general relativity*. 2004.
- [18] V. Mukhanov and S. Winitzki, *Introduction to quantum effects in gravity*. Cambridge University Press, 2007.
- [19] W. G. Unruh, “Notes on black-hole evaporation,” *Physical Review D*, vol. 14, no. 4, p. 870, 1976.
- [20] T. Hartman, “Lectures on quantum gravity and black holes,” *Cornell University*, 2015.
- [21] J. W. York Jr, “Role of conformal three-geometry in the dynamics of gravitation,” *Physical Review Letters*, vol. 28, no. 16, p. 1082, 1972.
- [22] G. Gibbons and S. Hawking, “Action integrals and partition functions in quantum gravity,” in *Hawking On The Big Bang And Black Holes*, pp. 107–111, World Scientific, 1993.
- [23] A. Ashtekar and S. Das, “Asymptotically anti-de sitter spacetimes: conserved quantities,” *Classical and Quantum Gravity*, vol. 17, no. 2, p. L17, 2000.
- [24] A. Einstein and N. Rosen, “The particle problem in the general theory of relativity,” *Physical Review*, vol. 48, no. 1, p. 73, 1935.
- [25] A. Einstein, B. Podolsky, and N. Rosen, “Can quantum-mechanical description of physical reality be considered complete?,” *Physical review*, vol. 47, no. 10, p. 777, 1935.
- [26] F. Pretorius and M. W. Choptuik, “Gravitational collapse in 2+ 1 dimensional ads spacetime,” *Physical Review D*, vol. 62, no. 12, p. 124012, 2000.
- [27] J. Maldacena and L. Susskind, “Cool horizons for entangled black holes,” *Fortschritte der Physik*, vol. 61, no. 9, pp. 781–811, 2013.
- [28] A. Messiah, *Mécanique quantique*. Dunod, 1995.